

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ
ПО РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ
СССР

Экз. № 6

65-6
5195

ПЕРЕВОД № 714

Карл Вебер

ПЛАНИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА PERT

Karl Weber

PLANUNG MIT DER "PROGRAM EVALUTION
AND REVIEW TECHNIQUE" (PERT)

Источник: "Industrielle Or-
ganisation", 1963, Bd.32,
N 2, S. 35-50.

ПЛАНИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА PERT

Рассматривается один из разрабатываемых в США методов планирования – метод оценки и обзора плана (PERT).

Основное отличие метода PERT от более раннего метода критического пути (CPM) при временном планировании состоит в том, что в методе PERT для каждой деятельности берутся три оценки времени: ожидаемое благоприятное время деятельности; ожидаемое неблагоприятное время деятельности; ожидаемое с наибольшей вероятностью время деятельности.

Среди разрабатываемых в последние годы в США методов планирования обращает на себя все большее внимание метод оценки и обзора плана (сокращенно метод PERT). В настоящей статье рассматривается происхождение, принципы и проблемы использования этой формы анализа критического пути [1], которая находится во взаимосвязи с ранее приведенным изложением метода критического пути (см. *Industriellen Organisation*, 1963, № 1).

1. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ

Система PERT была разработана в начале 1958 г. в связи с программой ракет "Поларис" [2]. В соответствующих работах под руководством представителя фирмы *Special Project Office* американского

военно-морского флота принимали участие различные специалисты фирмы **Lockheed Missile Systems Division**, а также специалисты отдела **Special Project Office** консультационной фирмы **Boor, Allen and Hamilton, Inc. (Chicago)** [3]. Ими была создана система планирования, приемлемая для комплексных экспериментальных конструктивных и перспективных работ. Преодолеваемые при этом трудности заключаются прежде всего во временном едином планировании умственной деятельности, в отсутствии опытных данных о сходных видах деятельности, а также в соответствующем учете часто встречающихся подробных изменений. Новая система должна была создать повсюду основы для успешного контроля, точного планирования и интенсивного контроля сроков поставки. Намеченные цели достигаются в дальнейшем благодаря использованию системы **PERT** во временном планировании. О найденных решениях говорят различные публикации **Bureau of Naval Weapons** американского военно-морского флота [4]. Особенно важными являются два кратких отчета о системе **PERT**, опубликованные во многих изданиях в 1958 г., дающие наилучшие представления о системе **PERT** [5]. Успехи, достигнутые военно-морским флотом, побудили и другие военные ведомства интенсивно заняться изучением нового метода. Это касается авиации, метод оценки программы которой (**PEP**) несколько отличается от системы **PERT**: поставщики должны сами разрабатывать сеть, а не только посылать основные данные на центральный вычислительный центр [6]. Раньше это приводило почти к полному согласованию методики **AFSC** с системой **PERT**, как это очевидно из новых публикаций авиации [7]. К счастью, от обозначения **PEP** отказались, так как количество сокращений (более или менее понятных) и так достаточно велико [8]. В США с помощью системы **PERT** осуществлялась только задача вооружения. Одновременно возникли многочисленные инструкции (указания) к системе **PERT**, используемые внутри фирм [9]. Новый метод планирования нашел свое

применение не только у поставщиков военно-морского флота и авиации, но в дальнейшем использовался также и в других экономических отраслях. Распространение метода PERT было вызвано многочисленными публикациями компаний **International Business Machines [10]** и **General Electric**.

Работы и отчеты [11] были опубликованы в многочисленных специальных журналах, что повысило интерес к системе PERT. Известны практические случаи применения системы PERT не только в промышленности; так, еще в 1962 г. в Нью-Йорке была разработана подробная сеть системы PERT для инсценировки "Morgana" [12]. В последние годы система PERT стала широко использоваться благодаря значительным ассигнованиям на анализ. Первоначальные работы проводились прежде всего **Aerojet-General Corporation , Sacramento (Cal.)**; **Light Military Electronics Departement der General Electric Co. , Utica (N.Y.)** [13]. Под руководством **Naval Special Projects Office** фирма **Management Systems Corporation** в кратчайшее время разработала стандартную систему PERT по планированию расходов [14].

Министерство военно-морского флота обратило внимание на осуществление системы PERT по планированию расходов. В обсуждении программы "Поларис" [15] в 1962 г. участвовали как специалисты системы PERT, так и другие заинтересованные лица. Необходимо упомянуть, что по инициативе военно-морского флота были созданы два фильма о системе PERT. Первый фильм "Описание метода PERT / время", выпущенный **Breakthrough der Merit Productions of California in San Fernando**, второй - "Описание метода PERT / расходы, системы принятия решений по руководству проектом". Фильмы стали доступны благодаря фирме **Management Systems Corporation in Cambridge (Mass)**. Раньше системой PERT интенсивно занимались различные консультационные фирмы. Особенно необходимо отметить фирму **Operations**

Research Incorporated in Santa Monica (Cal.) [16], а также фирмы Booz, Allen & Hamilton, Inc. и Management Systems Corporation [17].

Критические замечания о системе PERT встречаются очень редко. Для читателей, интересующихся математическими основами, особенно важна работа [18]. Для практика важным должно быть то, что в 1960 году впервые появился повод для критических замечаний, с одной стороны, относительно расходов, затраченных американским военно-морским флотом, а, с другой стороны, относительно обширных докладов, требуемых поставщиками [19]. Особенно необходимо упомянуть работу [20], в которой дается объективное представление, с учетом опыта фирмы Boeing.

2. ТЕХНИКА СПОСОБА

Как видно из предыдущего изложения, программа PERT была разработана для решения последовательных проблем в больших проектах американского военно-морского флота, а позднее развивалась дальше по директиве оборонного департамента. Другими фирмами были даны другие особые разработки [21], но на них ссылаются впоследствии лишь в крайнем случае. Основная цель данной работы заключается в концессионном изображении официальной системы PERT (первоначальное название Original (PERT)).

2.1. Ход планирования

При использовании системы PERT, так же, как при критическом методе планирования, устанавливается диаграмма сети. Система PERT, как и критический метод пути [22], состоит из деятельности и событий. Последние в более ранней литературе по методу PERT обозначались узловыми моментами и определялись как определенные значимые моменты завершения деятельнос-

тей при разработке программы [23]. Эта программа развития относится прежде всего к большому проекту. Типичным примером является программа ракет "Пола-рис". Объем работ, возникающих при таком планировании, дает возможность осуществлять планирование лишь в больших масштабах (грубое планирование). Это возможно в случае использования планирования в самых широких масштабах. Но все-таки и здесь степень мелкого подразделения отдельных проектов может быть резко увеличена.

С 1962 г. появились руководящие указания американского правительства относительно точного подразделения больших проектов. Наряду с этим оборонному департаменту поручаются ответственные участки при нормальных условиях (соотношениях), а также виды деятельности, время прохождения которых не должно превышать трех месяцев, расходы на которые не должны составлять более 100000 долларов и которые не дифференцируются, как этапы работ, а должны устанавливаться в сети на последнем этапе планирования [24]. В остальных случаях этапы работ, выпавшие на долю различных поставщиков, определяют степень точного подразделения сети.

Для отдельных решений поставщиками сеть была удачно разработана. Подробно она здесь не рассматривается, так как в отношении хода планирования между критическим методом пути и методом PERT не существует значительного различия. Необходимо при этом вспомнить о том, что происходит преимущественно разработка установки сети от конца к началу [25]. При этом можно указать на различные возможности решения, которые в дальнейшем используются в пределах планирования расходов [26]. На этой стадии планирования важна дальнейшая работа команды; при директивном планировании американской авиации на нее особенно обращали внимание [27].

2.2. Планирование времени

При использовании метода критического пути для каждого вида деятельности (*i*, *j*) принималась опреде-

ленная продолжительность времени, а при системе PERT проводились три оценки времени. Это делается с той целью, чтобы для случайно измененной продолжительности деятельности определить не только наиболее вероятное время, но также дать оптимистическую и пессимистическую оценку. Эти времена обычно обозначаются m , a , b . При этом a или b представляют собой ожидаемое благоприятное или неблагоприятное оцениваемое время деятельности. Причем m представляет собой с наибольшей вероятностью ожидаемое значение времени. На основе этих данных было рассчитано ожидаемое время деятельности:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6} .$$

Для этого предполагаемого интервала времени, необходимого для совершения того или иного вида деятельности, можно определить среднеквадратичное отклонение случайных переменных t от среднего значения t_e по следующей формуле:

$$\sigma_{t_e}^2 = \left[\frac{b - a}{6} \right]^2 .$$

Для стандартного отклонения оказывается:

$$\sigma_{t_e} = \frac{b - a}{6} .$$

Приведенные формулы просты. Они нашли отражение во многих публикациях относительно системы PERT. О выведении этих формул мало что известно. Ценные указания отражены в двух публикациях американского военно-морского флота [28], а также в работе [29]. Отчетливый вывод формул для метода PERT становится возможным только при совместном рассмотрении обеих ранее упомянутых работ. Для четкого понимания системы PERT необходимы следующие рассуждения.

В исследовательских и экспериментальных работах время деятельности не может быть рассчитано с необ-

ходимым ожидаемым. В большинстве случаев нужно считать, что фактически получаемые значения времени деятельности колеблются в пределах определенных границ. Колебание времени деятельности означает также, что срок окончания отдельных работ заранее нельзя точно определить. При этом необходимо заметить, что время деятельности всех работ, последовательно предшествующих определенному событию, оказывает влияние на срок исполнения. Эта взаимосвязь между ходом планирования (геометрическая модель) и временами видов деятельности и событий должна привести к развитию соответствующей "стохастической модели" [30]. При этом времена деятельности должны быть прежде всего тщательно исследованы.

Определяющим является то, что увеличение продолжительности деятельности в общем однозначно установить нельзя. Все оценки времени в известной степени неопределенны. Это зависит и от вида и от объема имеющейся информации. Они особенно неполны при новых разработках. Результатом является то, что с помощью относительно плоских проходящих кривых можно рассчитать плотность вероятностей. Это возможно особенно тогда, когда в зависимости от оценки устанавливается полная вероятность ошибки суждений. Необходимо заметить, что оценки продолжительности деятельности (хотя бы этого или нет) зависят от поставленных целей. Если постановить, например, что время, связанное с наибольшей плотностью вероятности, в дальнейшем принимается за стандарт и лежит в основе состава штатного расписания, то следует ожидать, что оценки проводятся более тщательно. При этом только крупные оценки ошибок должны быть хорошо различимы. Как правило, время деятельности, устанавливаемое специалистами, должно приниматься без дискуссий. Связанная с этим проблематика была отражена уже в первых публикациях американского военно-морского флота о методе PERT: Поскольку будет трудно получить более одной авторитетной оценки, возникает проблема перемещения личного состава. Эти перемещения частично зави -

сят от обязательств, планов и страховых полисов фирмы" [31].

Бесспорно, что степень неопределенности ожиданий относительно увеличения продолжительности отдельных работ может резко колебаться. Это ясно видно из различных форм кривых плотности вероятности (рис. 1).

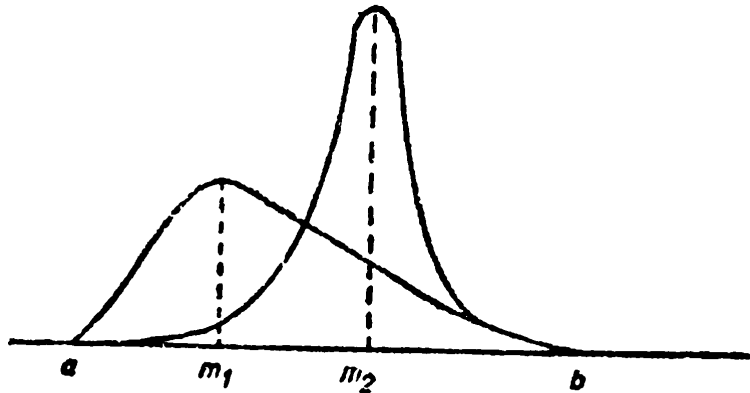


Рис. 1.

На степень неопределенности указывает прежде всего интервал a, b на оси x (оси времени), внутри которого располагается вся величина вероятности:

$$P = \int_a^b f(x) dx = 1.$$

Дальнейшая опорная точка определяет ход кривой плотности вероятности $f(x)$ между граничными значениями a, b [32].

Особенно необходимо знать значение времени с наибольшей плотностью вероятности. Если имеется симметричное с одной вершиной распределение вероятностей, то модус (m) находится в центре симметрии. В этом случае он совпадает со средним значением и медианой, но наиболее вероятное значение может располагаться ближе к a или к b . Если распределение имеет одну вершину и отклоняется вправо, то модус располагается слева от среднего значения и наоборот. Медиана располагается всегда между модусом и средним значением.

Необходимо заметить, что полоса изменения и расположение с наибольшей плотностью вероятности ограничены. Необходимо знать также плотность вероятности, определяющую модус. Как видно из рис.2, установленным значениям a, b и m в основном могут соответствовать различные распределения вероятностей. Лучше всего поэтому было бы характеризовать распределение вероятности с помощью так называемой функции рас-

пределения. В практической работе на значения a , b и m накладывается ограничение.

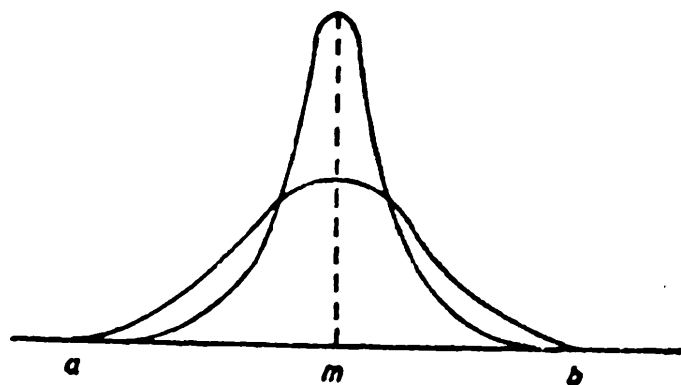


Рис. 2.

Эти три времени лежат в основе системы PERT. Их определение является отнюдь не легким, — это указывается в американской литературе. Это действительно для пессимистических оценок времени. В первой работе ВМФ, посвященной

системе PERT, указывалось: "Понятие "пессимистическое время" не является таким четким, ясным, как хотелось бы . . . Вероятно, можно рассматривать пессимистическую оценку как время, которое больше ожидаемого, но которое может потребоваться для выполнения одной из ста подобных деятельности" [33]. Описание оптимистического времени представляет, напротив, небольшие трудности: "Практически нет надежды на завершение деятельности за время, меньшее оптимистического, но может представиться возможность завершить деятельность за время, почти равное оптимистическому" [34]. Вероятное время обозначается как наиболее вероятное время. Подобные описания встречаются в лучших справочниках по системе PERT. В одной из последних работ американской авиации метод PERT характеризуется следующим образом: "Первой и наиболее важной из требуемых оценок времени является "наиболее вероятное время". Это — наиболее вероятное время, которое дается в том случае, если требуется только одна оценка времени. Это время имело бы место очень часто, если бы деятельность могла быть повторена бесчисленное количество раз при абсолютно одинаковых условиях без дополнительного обучения" [35].

Согласно основным положениям системы PERT установленные значения a , b , m для каждой дея-

тельности не совсем пригодны для временного планирования сети. Из практических соображений напрашивается здесь использование одного отдельного значения. В качестве возможного решения прежде всего предлагается единственное использование модуля. Этот вид планирования, очевидно, имел бы много общего с методом критического пути. В дальнейшем значение тройной оценки времени могло бы подвергнуться сомнению. Но этот случай не должен встречаться. Необходимо найти метод, согласно которому значения a , b , m , оценивающие каждый вид деятельности, рационально комбинировались бы друг с другом и могли быть положены в основу временного планирования сети.

Интересная взаимосвязь между областью изменения и модусом возникает при бета-распределении. Речь идет о распределении вероятности, которое в первом приближении имеет следующую форму [36]:

$$B(p, q, x) dx = \frac{1}{\beta(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \text{ для } 0 < x < 1.$$

$\beta(p, q)$ представляет собой так называемую бета-функцию, где:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

τ -ый момент определяется:

$$\frac{1}{\beta(p, q)} \int_0^1 x^{\tau+p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\beta(p+\tau, q)}{\beta(p, q)}$$

При этом среднее значение ($\tau = 1$) составляет:

$$\frac{\beta(p+1, q)}{\beta(p, q)} = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+1)\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{p}{p+q}.$$

Для дисперсии ($\tau = 2$) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\beta(p+2, q)}{\beta(p, q)} - \left[\frac{p}{p+q} \right]^2 &= \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}. \end{aligned}$$

Что касается формы бета-распределения, установ-

лено прежде всего следующее [37]: распределение в области $0 < X < 1$ ограничено и имеет одну вершину. Путем преобразования координат можно добиться того, что распределение может быть определено в любой конечной области. Форма функции зависит от показателей ρ и q . Для ρ (и соответственно q) больше 2 кривая обращается в ноль в левой (правой) конечной точке вместе с ее первой производной. Для $1 < \rho$ (и соответственно q) < 2 кривая вместе с вертикальной касательной сливаются в левой (правой) конечной точке, для $0 < \rho$ (и соответственно q) < 1 функция в левой (правой) конечной точке уходит в бесконечность, имея в качестве асимптоты соответствующую вертикальную прямую. Для ρ (или q) ≤ 0 интеграл расходится, так что больше функции распределения не существует. В случае, если $\rho - 1 = \alpha$ и $q - 1 = \gamma$, то для обоих первых центральных моментов (среднее значение и дисперсия) равны:

$$K_1 = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \gamma + 2},$$

$$K_2 = \frac{(\alpha + 1)(\gamma + 1)}{(\alpha + \gamma + 2)^2 (\alpha + \gamma + 3)}.$$

Плотность случайных изменений X , имеющих бета-распределение, можно соответственно записать:

$$f(x) = [\beta(\alpha + 1, \gamma + 1)]^{-1} x^\alpha (1 - x)^\gamma.$$

Форму, известную в литературе по методу PERT [38]

$$f(t) = N(t - a)^\alpha (b - t)^\gamma,$$

получают в случае, если

$$x = \frac{t - a}{b - a} \quad \text{или} \quad [\beta(\alpha + 1, \gamma + 1)]^{-1} = N,$$

где a и b определяют полосу изменений, а t представляет любое промежуточное значение времени.

На основании дальнейших исследований можно установить следующее: $f'(t) = N(t - a)^{\alpha-1} (b - t)^{\gamma-1} [\alpha(b - t) - \gamma(t - a)]$.

Кривая плотности вероятности имеет одну вершину; модус представляет собой временное значение с наибольшей локальной плотностью вероятности. Вместе с этим $t = m$ определяется на основании:

$$\alpha(b - m) - \gamma(m - a) = 0.$$

Особенно тщательно исследовались (изучались) центральные моменты (семииварианты) [39] бета-распределения [40]. Было установлено, что для среднего значения (K_1) имеет место следующее соотношение:

$$(\alpha + \gamma + 2 + n)K_1 = (\alpha + \gamma)m + (a + b),$$

где m является модусом, а $n (= 0)$ представляет собой сокращенное на единицу порядковое число сомнительного момента.

Путем простого преобразования получают:

$$(\alpha + \gamma + 2 + n)K_1 = (\alpha + \gamma + 2)m + (a + b) - 2m.$$

Для центрального момента второго порядка (дисперсия) имеем:

$$(\alpha + \gamma + 2 + n)K_2 = (a + b)K_1 - ab - K_1^2.$$

В этом случае $n = 1$.

Вышеупомянутое уравнение можно преобразовать, ссылаясь на работы [39, 40].

В заключение получают:

$$(\alpha + \gamma + 2 + n)K_2 = \frac{(b - a)^2}{4} - \frac{(\alpha + \gamma)^2}{(\alpha + \gamma + 2)^2} \left[\frac{a + b}{2} - m \right]^2.$$

Моменты более высокого порядка можно рассчитывать по следующей формуле:

$$(\alpha + \gamma + 2 + n)K_{n+1} = n(a + b)K_n - n \left[K_1 K_n + \binom{n-1}{1} K_2 K_{n-1} + \dots K_n K_1 \right].$$

Эта формула действительна для $n = 2, 3, \dots$

Формула Брайтенбергера, выведенная для K_1 , может быть записана следующим образом:

$$K_1 - m = \frac{2}{\alpha + \gamma + 2} \left[\frac{a + b}{2} - m \right].$$

Отсюда вытекает, что при данных a , b и m в результате соответствующего выбора $(\alpha + \gamma)$ каждое значение между $(a + b)/2$ и модусом должно направляться к среднему значению. Эта взаимосвязь имеет основное значение для дальнейшей разработки системы PERT. На основе этого можно достичь цели при рациональном использовании α , b и m для получения значения, подходящего для временного планирования сети.

Пусть, например, сумма $(\alpha + \gamma) = 4$. В этом случае $2/(\alpha + \gamma + 2)$.

В этой связи имеет значение следующее положение:

$$\alpha(b - m) - \gamma(m - a) = 0.$$

Ссылаясь на работы Брайтенбергера, можно выполнить следующие преобразования [41]:

$$m = \frac{\alpha\gamma + b\alpha}{\alpha + \gamma} = \frac{(\alpha + \gamma)a + \alpha(b - a)}{\alpha + \gamma}$$

$$\alpha = \frac{(\alpha + \gamma)(m - a)}{b - a}.$$

Если $\alpha + \gamma = 4$, то оказывается, что модус составляет 1/4 области изменения α , b . Значение α устанавливается на 1. Дисперсия рассчитывается по следующей формуле (для $\alpha + \gamma = 4$):

$$K_2 = \frac{(b - a)^2}{28} - \frac{4}{63} \left[\frac{a + b}{2} - m \right]^2.$$

Если модус соответствует значению $(a - b)/2$, то для стандартного отклонения получают $\sigma = (b - a)/\sqrt{28}$.

Если модус располагается при a , то стандартное отклонение составляет $\sigma = (b - a)/\sqrt{252/5}$. Это означает, что стандартное отклонение (согласно положению модуса) может составлять 1/5 - 1/7 интервала a , b . Если взять нормально принятый вид кривой плотности вероятности при оценке времени, то оказывается, что найденное в результате опыта значение $\alpha + \gamma = 4$ при первоначальном развитии системы PERT должно быть

оставлено. На основе этого удалось получить для центральных моментов следующие результаты:

$$\begin{aligned} 6 K_1 &= (a + b) + 4m \\ 7 K_2 &= (a + b) K_1 - ab - K_1^2 \\ 4 K_3 &= (a + b) K_2 - 2 K_1 K_2 \\ 3 K_4 &= (a + b) K_3 - 2 (K_1 K_3 + K_2^2) \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Среднее значение и дисперсия играют важную роль. Оказывается, что K_1 соответствует значению, известному из литературы о системе PERT:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}.$$

При этом t_e чаще всего обозначается как ожидаемое время.

Относительно дисперсии установили, что известная формула системы PERT $\sigma^2 = (b - a)^2 / 36$ приводит только к приближенному значению; соответствующая ей $\sigma = (b - a) / 6$ представляет собой грубую аппроксимацию [42]. Для быстрого обнаружения среднего значения (t_e) фирма **Varian Associated, Inc.** разработала специальную счетную линейку [43]. Практическое значение этого счетного устройства незначительно; оно продается фирмой **Merchandising Methods Inc.** Это объясняется тем, что среднее значение можно легко рассчитать по формуле [44]:

$$t_e = \frac{b - [(m - a) + m]}{6} + m.$$

В случае, если оцененные значения для a , m и b составляют, например, 5, 10 и 12, t_e устанавливается на 9, 5. Вычисление:

$$\begin{aligned} 10 - 5 &= 5; 10 + 5 = 15; 12 - 15 \\ &= -3; -3/6 = -0,5; 10 + (-0,5) = 9,5. \end{aligned}$$

Остальные численные примеры приведены в табл. 1. Эта таблица основывается на сети, используемой при разработке метода критического пути (см. рис. 3) [45]. Более ранние значения времени (y_{ij}) обозначены в табл. 1 как наиболее вероятные значения времени. Они были дополнены данными значений a и b и ис-

пользовались для расчета прочих основных данных системы PERT. Они охватывают не только среднее

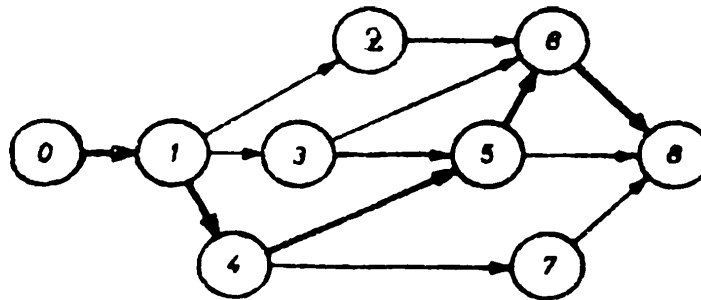


Рис. 3.

значение времени (t_e) деятельности, но также стандартное отклонение (σ), расчет которых легко осуществить, используя следующие разделы таблицы:

$1/6 = 0,2$	$4/6 = 0,7$
$2/6 = 0,3$	$5/6 = 0,8$
$3/6 = 0,5$	$6/6 = 1,0$

Таблица 1

Величины видов деятельности

i	j	a	m	b	t_e	b-a	σ_{t_e}	$\sigma_{t_e}^2$	(b-a) ²
0	1	5	10	12	9,5	7	1,2	1,4	49
1	2	5	6	11	6,7	6	1,0	1,0	36
1	3	4	6	12	6,7	8	1,3	1,7	64
1	4	5	10	15	10,0	10	1,7	2,9	100
2	6	2	4	8	4,3	6	1,0	1,0	36
3	5	2	3	8	3,7	6	1,0	1,0	36
3	6	18	20	24	20,3	6	1,0	1,0	36
4	5	13	14	17	14,3	4	0,7	0,5	16
4	7	10	12	16	12,3	6	1,0	1,0	36
5	6	2	4	10	4,7	8	1,3	1,7	64
5	8	8	10	12	10,0	4	0,7	0,5	16
6	8	8	8	8	8,0	0	0,0	0,0	0
7	8	2	3	3	2,8	1	0,2	0,0	1

Основными важными значениями являются дисперсия (σ^2) и $(b-a)^2$. Необходимо подчеркнуть, что рас-

чет дисперсии и (или) стандартного отклонения имеет огромное практическое значение. По этому поводу ясно сказано в авиационном справочнике: "Двумя очень важными аспектами PERT, которые часто игнорируются, являются стандартное отклонение и вероятности. Вместо этого внимание концентрируется на рассчитанных моментах времени, как если бы они были только абсолютными, и не учитываются случайные аспекты. Такое толкование метода PERT может привести к потенциальным проблемам и затруднениям", [16].

Установлено, что формула $t_e = (a + 4m + b)/6$ ни в коем случае не должна использоваться для определения запланированного времени. В новейших официальных изданиях относительно системы PERT указывалось: " t_e не должно использоваться автоматически для планирования деятельности во времени" [47]. Основы (суть) легко понять в случае, если $(m - a) < (b - m)$, при $t_e > m$.

Запланированное время t_e , очевидно, должно было бы привести к широкому стандарту (относительно наиболее вероятного момента времени), соблюдение и сокращение которого может быть связано с нежелательными побочными действиями (незначительная интенсивность работы, простои и т.д.). В справочнике DOD / Nasa об этом говорится следующее: "Если бы руководителю пришлось использовать величину (t_e) для планирования деятельности во времени, то соответствующему контролеру давалось бы на $(t_e - m)$ недель больше для завершения работы, чем ему требовалось по наиболее вероятной оценке. Отдельному работнику или группе очень редко удастся выполнить задание за период времени меньше планируемого. Чтобы осветить вторую проблему, создаваемую автоматическим планированием деятельности во времени, с целью охватить величину (t_e), предположим, что деятельность фактически завершается в число недель m , которые оценщик считает наиболее вероятными, а не в планируемые (t_e) недели. В таком случае может оказаться невозможным немедленно начать следующую деятельность на том же пути, если наличие ресурсов, необходимых для этой сле-

дующей деятельности, не запланировано на это время". [48]. Специалисты американской авиации очень четко определили: "Когда программа пущена в производство, не должно быть никаких неопределенностей. Это является основной причиной того, что метод PERT не находит применения на производстве" [49].

На основании табл.1 можно приступить к вычислению времени событий и связанных с ним величин. Прежде всего определяются самый ранний и самый поздний сроки событий. Возможное самое раннее время события обозначается обычно T_E , в то время как T_X представляет собой самый поздний срок завершения события. Такие обозначения мало удобны, но с успехом применяются при чтении более старой литературы о методе PERT. Расчет значений T_E и T_X определенного события происходит так же, как при методе критического пути [50]. Вместе с тем вновь необходимы расчеты времени, ведущиеся от начала и от конца. В последнем случае необходимо исходить из запланированного времени завершения проекта (T_{OJ}). В случае, если это время неизвестно, можно использовать ожидаемое время окончания T_{OE} в качестве исходной величины для обратного расчета; при этом $T_{OE} = T_{OX}$ необходимо придать постоянное значение ($\sigma^2 T_{OX} = 0$). Относительно значений T_E и T_X следует принять во внимание, что в предположении определенного распределения вероятности они основываются на средних значениях, рассчитанных по α , β и m (точнее, характеризуются по данным дисперсии и (или) стандартного отклонения). Это означает, что времена событий приобретают определенный вероятностный характер. Он определяется дисперсией и (или) стандартным отклонением. В американской литературе по системе PERT величина σ^2 считается среднеквадратичным отклонением: "Самый поздний момент события, подобно самому раннему, существует в форме распределения, которое выражается через среднее значение и через дисперсию" [51]. Так как времена событий (учитывая центральную предельную теорему [52]) можно рассчитать по

распределению вероятности, приближающемуся к нормальному распределению, то σ приобретает большое значение. В справочнике по системе PERT американской авиации заслуженное внимание уделяется стандартному отклонению [53].

Таблица 2

Матрица основных данных

T_k	$\sigma_{T_k}^2$	$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0,0	0,0	0		9,5 1,4							
9,5	1,4	1			6,7 1,0	6,7 1,7	10,0 2,9				
16,2	2,4	2							4,3 1,0		
16,2	3,1	3						3,7 1,0	20,3 1,0		
19,5	4,3	4						14,3 0,5		12,3 1,0	
33,8	4,8	5							4,7 1,7		10,0 0,5
38,5	6,5	6									8,0 0,0
31,8	5,3	7									2,8 0,0
46,5	6,5	8									
T_L			0,0	9,5	34,2	18,2	19,5	33,8	38,5	43,7	46,5
$\sigma_{T_L}^2$			6,5	5,1	1,0	1,0	2,2	1,7	0,0	0,0	0,0

Время событий, найденное на основании табл. 1, становится, вместе с соответствующей дисперсией, очевидным из табл.3. Для их расчета предназначена матрица основных данных, изображенная в табл. 2.

Согласно применяемому методу дисперсии ($\sigma_{T_k}^2$ и $\sigma_{T_L}^2$), относящиеся к событиям, можно рассчитать путем сложения дисперсий $\sigma_{t_e}^2$, относящихся к деятельности. Другой способ исходит из того, что для всех деятельности, определяющих время событий, должны при-

бавляться значения $(\beta - \alpha)^2$, сумма которых делится на 36 [54]. Оба способа дают одинаковые результаты, разница лишь в округлении.

Указанными методами можно проводить расчеты без особых трудностей. Теоретически они не могут удовлетворять всем требованиям. Об этом указывается в справочнике PERT американского военно-морского флота и авиации [55]. В работе [56] подчеркивается, что трудности, обусловленные "методом сложения", могут быть устранены. Брайтенбергер сделал первую попытку решения этих проблем [57]. Подробно они здесь не рассматриваются.

Таблица 3

Величины событий

j	T_E	$\sigma_{T_E}^2$	T_L	$\sigma_{T_L}^2$	$T_D = T_L - T_E$	$P(T_D \leq 0)$	T_S	$P(T_E = T_S)$
0	0,0	0,0	0,0	6,5	0,0	0,50		
1	9,5	1,4	9,5	5,1	0,0	0,50		
2	16,2	2,4	34,2	1,0	18,0	+0,00		
3	16,2	3,1	18,2	1,0	2,0	0,16		
4	19,5	4,3	19,5	2,2	0,0	0,50		
5	33,8	4,8	33,8	1,7	0,0	0,50		
6	38,5	6,5	38,5	0,0	0,0	0,50		
7	31,8	5,3	43,7	0,0	11,9	+0,00		
8	46,5	6,5	46,5	0,0	0,0	0,50	46,5	0,50

В табл.3 дано общее буферное время $T_E - T_L = -T_D$. Оно указывает на то, что события 2, 3 и 7 можно рассчитать с помощью положительного резерва времени ($T_D > 0$). При прочих событиях ожидаемое буферное время составляет 0. В этом случае можно с уверенностью на 50% считать, что впоследствии выявится положительное буферное время.

При событиях 2, 3, 7 величина вероятности $P(T_D \leq 0)$ располагается ниже 50%. Значения, обнаруженные согласно методу PERT, внесены в табл.3.

Используемый метод расчета, как будет показано в дальнейшем, очень прост. Исходной точкой для получе-

ния решений метода PERT является то обстоятельство (основанное на положении предельной теоремы), что T_E и T_L могут рассматриваться как среднее значение двух взаимно-стохастически-независимых нормальных распределений. О форме этих кривых плотности свидетельствует значение σ . Чем больше дисперсия, тем более пологими становятся кривые. Круто изменяющиеся кривые означают, по той же причине, низкое значение для $P(T_D \leq 0)$. (Сравни рис. 4.).

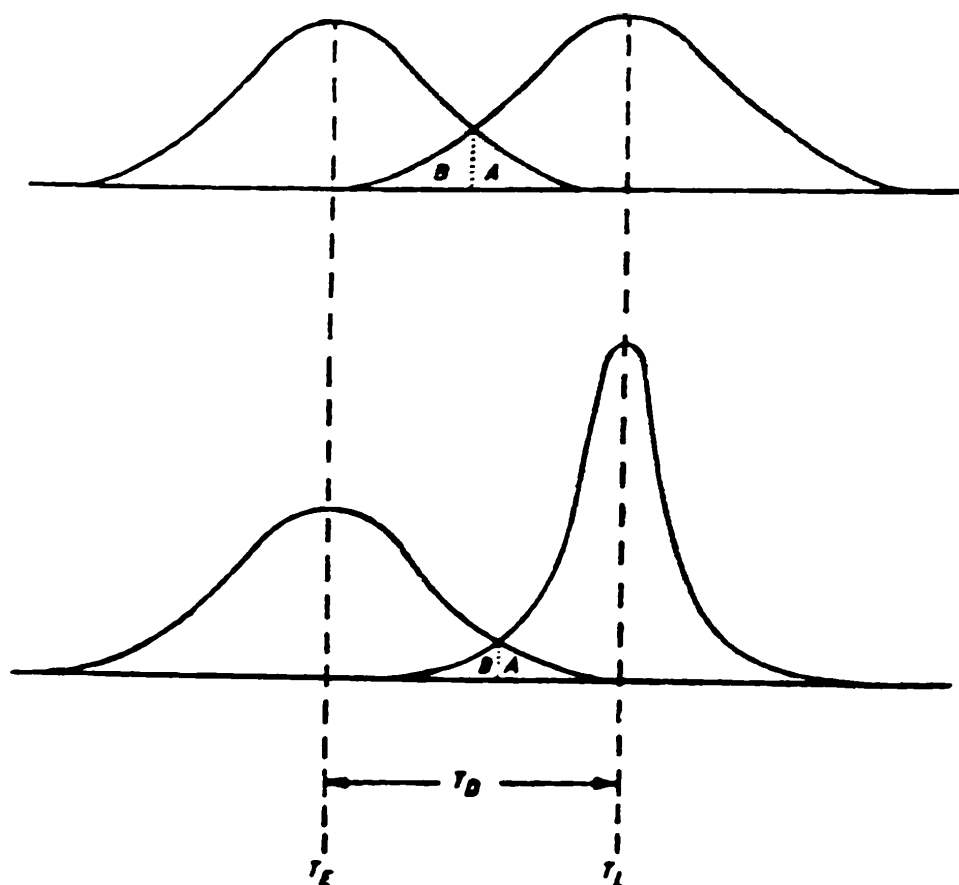


Рис.4. A/B - Кривая плотности вероятности для T_E (T_L) в области "отсутствия задержки".

На основе этих соображений оказывается, что вероятности буферного времени можно понять правильно только при надлежащем учете величин T_D , σT_E и σT_L .

Из математической статистики известно [58], что при нормальном (стохастически независимом) рас-

пределении с рассеянием σ_{T_E} и σ_{T_L} для средне-
квадратичного отклонения разности $T_E - T_L = -T_D$ дейст-
вительно следующее соотношение:

$$\sigma_{(T_E - T_L)}^2 = \sigma_{T_E}^2 + \sigma_{T_L}^2.$$

Частное $x = \frac{T_E - T_L}{\sqrt{\sigma_{T_E}^2 + \sigma_{T_L}^2}}$ указывает, насколько их
дисперсия отклоняет буферное время T_D , умноженное
на -1, от 0. Если это отклонение принять за $3\sigma_{T_D}$, то
практически уверенность можно рассчитывать с помощью по-
ложительного буферного времени. Это происходит пото-
му, что вероятность буферного времени нормально рас-

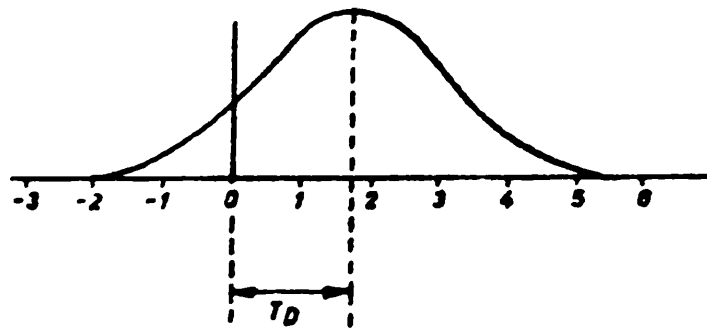


Рис.5. Кривая плотности вероятности для T_D .

пределена (рис. 5). Здесь можно работать с помощью
сигма-правил. Значения функции распределения $\Phi(x)$
можно определить из рис. 6. Точные значения $\Phi(x)$
табулируются и вносятся выборочно в табл. 4.

Система PERT разработана на основе точных
значений вероятности. Согласно кратко описанному ме-
тоду можно обнаружить значения $P(T_D \leq 0)$, кото-
рые внесены в табл.3.

Событие 2: $16,2 - 34,2 = -18,0$; $2,4 + 1,0 = 3,4$;

$$\sqrt{3,4} = 1,84; -18,0 / 1,84 = -9,76;$$

$$P(T_D \leq 0) = +0.$$

Событие 3: $16,2 - 18,2 = -2,0$; $3,1 + 1,0 = 4,1$;

$$\sqrt{4,1} = 2,02; -2,0 / 2,02 = -0,99;$$

$$P(T_D \leq 0) = 0,16.$$

Таблица 4

Нормальное распределение Значения функции распределения $\Phi(x)$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
-0,0	0,5 000	0,0	0,5 000
-0,1	0,4 602	0,1	398
-0,2	207	0,2	793
-0,3	0,3 821	0,3	0,6 179
-0,4	446	0,4	554
-0,5	085	0,5	915
-0,6	0,2 743	0,6	0,7 257
-0,7	420	0,7	580
-0,8	119	0,8	881
-0,9	0,1 841	0,9	0,8 159
-1,0	587	1,0	413
-1,1	357	1,1	643
-1,2	151	1,2	849
-1,3	0,0 968	1,3	0,9 032
-1,4	808	1,4	192
-1,5	668	1,5	332
-1,6	548	1,6	452
-1,7	446	1,7	554
-1,8	359	1,8	641
-1,9	287	1,9	713
-2,0	228	2,0	772
-2,1	179	2,1	821
-2,2	139	2,2	861
-2,3	107	2,3	893
-2,4	082	2,4	918
-2,5	062	2,5	938
-2,6	047	2,6	953
-2,7	035	2,7	965
-2,8	026	2,8	974
-2,9	019	2,9	981
-3,0	013	3,0	987

Примечание: Оуэн А. Дэвис. Статистические методы в исследовании и производстве с уклоном на химическую промышленность. 3-е издание, Лондон/Эдинбург, 1957, стр.162-163.

Вышеуказанная таблица (измененная и сокращенная) публикуется с согласия автора и издательства фирмы Oliver/Boyd Ltd.

Практически эти расчеты проводятся очень редко [59], хотя особенно ими пользуются при планировании проводимых мероприятий. В общей литературе по

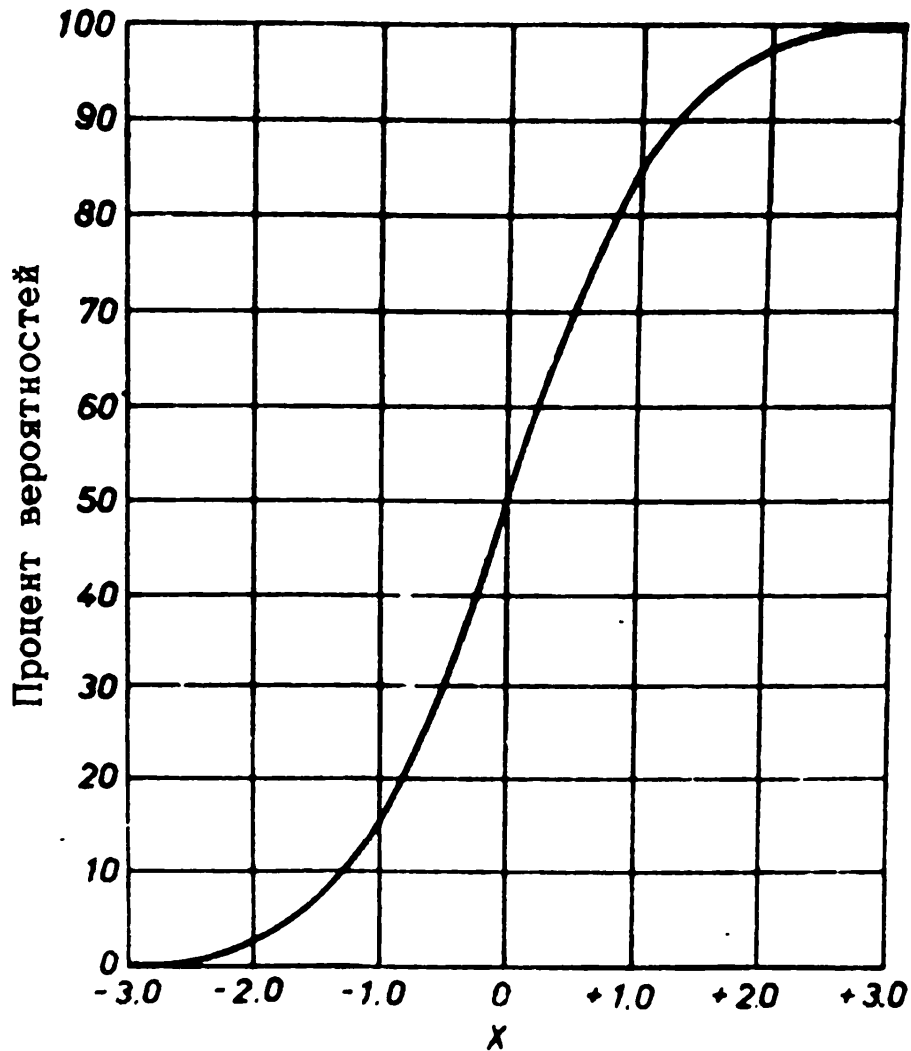


Рис. 6.

системе PERT все большее внимание уделяется вопросам, связанным с соблюдением запланированных промежуточных или конечных сроков (T_s). Для них вероятность получается $P(T_E = T_s)$. Практически речь идет здесь о специальном случае расчета вероятностей буферного времени. В противоположность общему случаю здесь твердо установлено время события (T_s); его дисперсия и стандартное отклонение имели нулевое значение. Ранее приведенная формула может быть преобразована в случае установления $T_x = T_s$.

$$x = \frac{T_E - T_L}{\sqrt{\sigma_{T_E}^2 + \sigma_{T_L}^2}} = \frac{T_E - T_E}{\sigma_{T_E}} .$$

Если в этой формуле оказывается, что X имеет нулевое значение, то можно с уверенностью на 50% сказать, что запланированный срок будет выполнен. $X < 0$ означает, что предусмотренный срок выполним с еще большей вероятностью. При этом необходимо заметить, что значения функции распределения $\Phi(X)$, непосредственно полученные для X , характеризуют только вероятности превышения сроков. Это психологически должно быть особенно неблагоприятно. Для прочих решений системы PERT необходимо незначительное преобразование основной формулы. Это осуществляется очень просто, исходя из буферного времени $(T_S - T_E)$. При использовании формулы

$$x = \frac{T_S - T_E}{\sigma_{T_E}}$$

соответствующие значения $\Phi(X)$ указывают на вероятность соблюдения запланированных сроков.

Этот метод очень часто используется на практике [60]. Прежде всего исследуются конечные сроки отдельных проектов (T_{OS}) ; далее следуют отчеты американской авиации относительно метода PERT, в которых говорится о вероятности завершения деятельности в запланированный срок для всех важных событий. Значения $\Phi(X)$ объясняются следующим образом: "Вообще говоря, когда коэффициент вероятности ниже 0,25, это сопряжено с определенным риском для программы. Когда коэффициент находится между 0,25 и 0,60, степень риска является обычной и характерно довольно хорошее равновесие ресурсов. Если коэффициент вероятности превышает 0,60, это, вероятно, сопряжено с затратой дополнительных ресурсов, и характерно потребление обычного количества ресурсов" [61].

Более тщательно устанавливаются предельные значения IBM [62]. Вероятность соблюдения конечного срока очевидна из табл.3. Она составляет для $T_{OS} = T_E$ 0,50.

Соблюдение установленных сроков в отношении системы PERT подвергается регулярному контролю. В американских больших проектах имеют место двухнедельные запланированные договоры состава по штатному расписанию [63], силу высказывания которых подвергают в какой-то степени сомнению [64].

В случае, если проект может быть рассчитан не в соответствии с запланированным временем, необходимо временное планирование. При большом проектировании сроки, обязательно установленные для нескольких поставщиков, по возможности не изменяются. Угрожающее нарушение (превышение) сроков может встретиться прежде всего в результате проведения внутрипроизводственных (количественных, качественных, интенсивных) мероприятий. Только когда обнаруживаются (при важнейших событиях) не устраненные превышения сроков, в этом случае для всего проекта необходима проверка и новое определение значения T_s . В американской литературе для этой цели используется выражение "повторное планирование во времени". [65]. Менее употребительно обозначение "изменение сроков в зависимости от времени" [66]. Консультанты ВМФ уже с 1958 г. интенсивно занимались новым установлением сроков [67]. Разработанные в то время директивы могли использоваться преимущественно в малых проектах. Короче говоря, они (директивы) означали следующее: обширное новое планирование (при нормальных соотношениях) только тогда необходимо, если при сравнении запланированного срока (T_{os}) и самого раннего срока окончания из возможных T_{oe} всего проекта оказывается, что $P(T_{oe} = T_{os}) < 0,25$. Это означает, что новое установление запланированного времени только тогда актуально, когда T_{os} превышает значение T_{oe} на $-0,67\sigma$. Относительно приведенного ранее числового примера это означает, что T_{os} могло бы располагаться в интервале между 44-46,5 неделями, без повторного планирования во времени. В случае необходимости нового установления запланированного времени, как указывается в справочнике PERT военно-морского флота, необходи-

мо, чтобы T_{03} располагалось в вышеупомянутом вероятном интервале. Наконец, в результате обратного расчета следует определить новое буферное время. На основе полученных результатов в дальнейшем необходимо установить другие запланированные времена. При этом надо различать два случая. Первый характеризу-

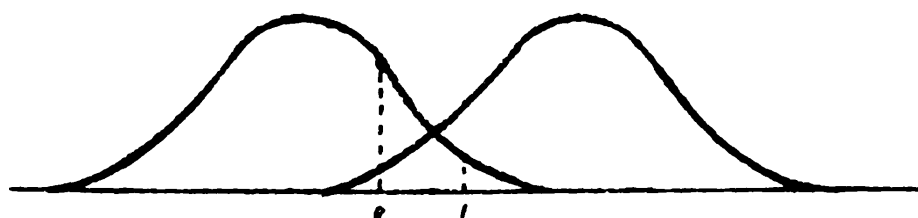


Рис. 7.

ется тем, что $T_x < T_E$. Если это действительно так, то

$T_s = T_x$. Сложные соотношения имеют место тогда, когда $T_x \geq T_E$. В этом случае запланированные времена определяются таким образом, что (учитывая распределение вероятности T_E и T_x) по возможности все возможные истинные значения (самое раннее и самое позднее время) удовлетворяют требованию $e \leq T_s \leq l$ (рис. 7). В справочнике PERT американского ВМФ отмечается: "Когда самый поздний момент события имеет место до самого раннего события, то запланированный срок должен совпадать с самым поздним моментом времени. Когда же самый поздний момент времени не имеет места до самого раннего момента времени, то запланированный срок завершения этого события должен совпадать с моментом, который максимально увеличивает вероятность того, что этот срок действительно будет соблюден и будет находиться внутри интервала задержки" [68].

Как становится очевидным из программы счетных устройств американского военно-морского флота [69], установление T_s лучше всего осуществляется согласно следующему методу: Прежде всего определяют значение $P/e \leq [T_E + 1/T_x - T_E / 2] \leq 1 /$. Наконец, путем последовательного увеличения или уменьшения потенциального значения T_s следует выяснить, можно ли достичь в результате таких временных сдвигов уве-

личения значения вероятности. Это возможно в том случае, когда значения σ_{T_E} и σ_{T_L} резко отличаются друг от друга (см.рис.8). T_S , таким образом, должно установить, что условие $T_s = \max [P(e \leq s) P(l \geq s)]$

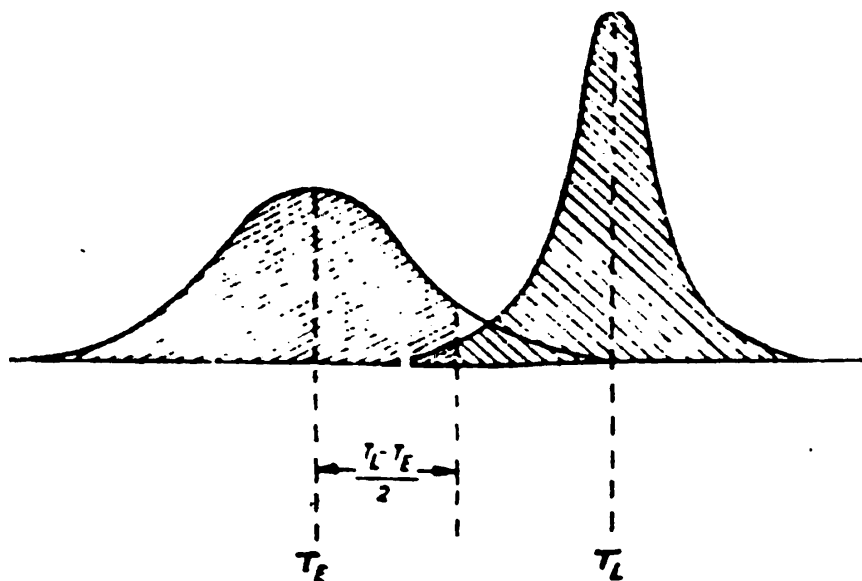


Рис. 8.

выполнено [70]. Указанный метод для нового установления T_S обозначается экспертами метода PERT как необязательный (факультативный) метод. Речь идет о приближенном решении, при котором затраты, связанные с выбором различных методов, не учитываются [71].

Планирование расходов

С давних пор в Америке предпринимались большие усилия относительно усовершенствования системы PERT и использования ее при планировании расходов. Прежде всего к этому стремились фирмы Aerojet General Corporation, Sacramento (Cal.) [72]; General Electric Company (Light Military Electronics Department), Utica (N.Y.) [72]/[73]. В конечном счете они пришли к единой форме NASA/DOD PERT/ [74].

Решение, выработанное Aerojet-General-

Corporation отличается использованием трехзначной системы **PERT** для планирования расходов. Система была разработана с применением следующей формулы:

$$C_E = \frac{C_o + 4C_m + C_p}{6}.$$

При этом на зарплату, оклады и прочие расходы должны составить сначала отдельные бюджеты, которые в конечном счете включаются в общий план. Особенно необходимо отметить все более возрастающее значение контроля бюджета. Он ограничивается не заранее запланированным договором состава по штатному расписанию, а скорее обнаруживает типичные характеристики системы **PERT**. Прежде всего необходимо отметить вероятность того, что затраты останутся в пределах сметы, что рассчитывается при рассмотрении временного анализа обычным способом. Следующим показателем является соотношение между степенью изготовления и требованием бюджета (отношение времени к затратам).

Еще ранее кратко обсуждался способ составления бюджета. В работе [75] по этому поводу сказано: "В большинстве случаев нет необходимости давать несколько оценок затрат, т.е. оптимистическую, наиболее вероятную и пессимистическую. Не существует вероятностного распределения затрат, которые могут быть использованы для построения кривой нормального распределения такой, какая применяется по методу **PERT** для оценок времени. Лучше всего оценивать вероятную одиночных затрат на определенный вид деятельности". Метод составления бюджета, разработанный фирмой **General Electric Corporation**, основывается на едином принципе. Здесь также придается большое значение регулярному, строго дифференцированному контролю (соблюдению) плана. Используемый при этом отчет руководства оказывается практически действительно ценным. Он был принят слегка измененным фирмой **Remington Rand** [76].

Эти новые положения позволили специалистам американского военно-морского флота, занимающимся планированием, интенсивно заняться системой **PERT** при-

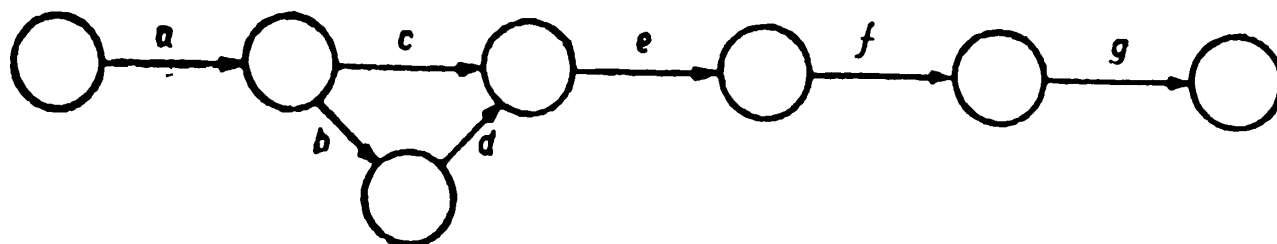
менительно к расходам. В 1961 г. совместно с Management Systems Corporation были впервые разработаны различные системы, которые в дальнейшем проверялись на их практическое использование. На основе проведенных опытов в дальнейшем были разработаны простейшие методы, основывающиеся только на оценке затрат для группы связанных деятельности [77]. Результатом этих работ явился справочник DOD-/Nasa, опубликованный в июне 1962 г. Система DOD-/Nasa включает в себя восемь основных отчетов, которые не отличаются оригинальностью. Краткий отчет руководства указывает на существующие и ожидаемые отклонения бюджета; кроме того, были обнаружены данные относительно предполагаемой степени соблюдения сроков, возможных нехваток [78]. Основные данные всего сообщения были представлены графически в отчете о стоимости работ [79]. Необязательные отчеты и отображения людских ресурсов содержат всю основную информацию о нуждах в рабочей силе, о необходимой работе и т.д., при этом все данные были документально доказаны по группам деятельности [80]. Отчеты являются ценным вкладом для планирования приема (набора) рабочей силы, они во многом могут облегчить проверку хода планирования.

О степени соблюдения временных планов и расходов бюджета свидетельствуют отчеты о планировании времени и затрат [81]. Они дают сведения и указывают, в какой степени в результате определенных мероприятий можно достичь наилучшего соблюдения планов. Планирование такого вида мероприятий должно быть облегчено благодаря отчетам об узловых моментах [82]. Практическое значение этих однолетних или многолетних прогнозов было условно признано в американской литературе, посвященной системе PERT: "Эти отчеты не имеют здесь особо важного значения, если они тем или иным образом не показывают, какое действие требуется предпринять и в отношении каких видов деятельности или узловых моментов. Эта информация является незначительной, даже когда отмечен

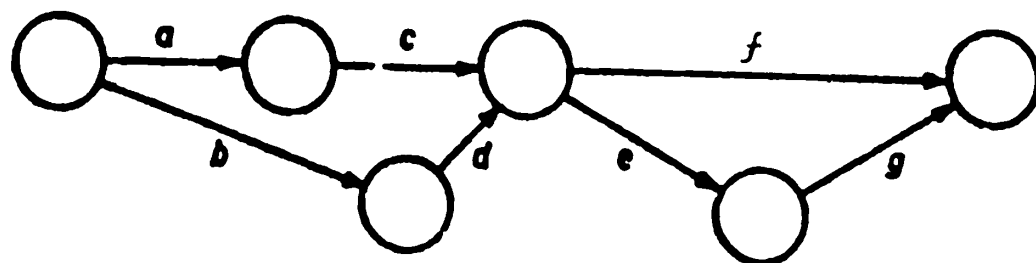
каждый узловой момент, запланированный в период выполнения программы или в период, равный одному году. § 83 7. Особенно необходимо упомянуть два дополнительных сообщения о системе расходов по методу PERT (содержащиеся в справочнике DOD-/Nasa). Первый свидетельствует о том, что конструкция сети PERT может быть значительно облегчена при выборе различных планов (указываются подробные данные о затратах времени, расходах и рисках) § 84 7. В справочнике приводятся примеры трех планов (рис. 9). Первый вариант (наиболее эффективный план) указывает метод, который должен использоваться при нормальных соотношениях. Второй вариант (план заданных сроков) используется в том случае, когда должны соблюдаться определенные заранее указанные условия. Этот план выделяется благодаря параллельному включению отдельных операций; он связан с повышенным риском и расходами по сравнению с первым вариантом. Третий вариант (план кратчайшего временного выполнения) информирует о потребности во времени, которое безусловно требуется для приведения (доказательств) желаемого конечного результата (при отказах отдельных анализов, испытаний и т.д.). Разумеется, этот план связан с еще большим риском.

Во втором дополнительном отчете DOD-/NASA, тесно связанном с методом критического пути, рассматривается проблема сокращения затрат времени § 85 7. Подробно она не рассматривается здесь. Необходимо только отметить, что согласно найденному решению определенные (основные) рассчитанные расходы рассматриваются в форме прибавки (доплаты, надбавки) к расходам, которые имеют место: "Постоянные сверхзатраты должны рассматриваться до того, как руководитель может определить, даст ли спланированное распределение ресурсов внутри определенной намеченной продолжительности наименьшую величину затрат. Это особенно важно для больших проектов. Когда постоянные затраты составляют значительную часть общих затрат, дальнейшее сокращение времени выполнения проекта может фактически привести к уменьшению общих затрат, если

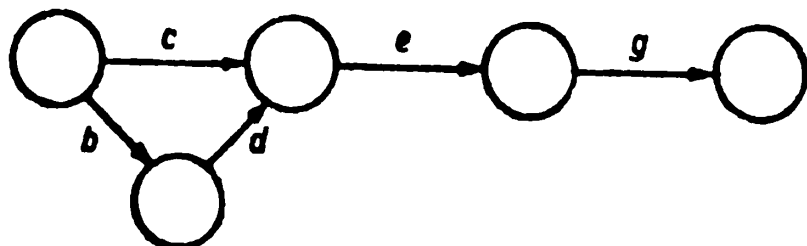
Вариант 1



Вариант 2



Вариант 3



Расхо- ды (франки)	Затраты времени (недели)	Риск
1'000'000	100	низкий
1'200'000	70	средний
850'000	65	высокий

Рис.9. Три варианта.

даже непосредственные затраты возрастают". [86].

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ

В предыдущем разделе рассматривалась основа системы PERT. Дальнейшие существенные разработки, насколько это удастся установить, редки. Наряду с работой [87], в которой приводятся различия между сетями с альтернативными решениями и без альтернативных решений, заслуживает прежде всего внимания работа о системе PERT [88]. В последней работе принимаются во внимание технические параметры ограничения ресурсов, а также времени. Решение, кратко описанное в [88], требует иного рассмотрения. Подробно оно здесь не рассматривается. Обобщенный метод PERT, разумеется, пока должен бы не иметь практического значения. Наиболее важные тенденции развития во многом исходят из того, чтобы комбинировать по возможности в дальнейшем метод критического пути и метод PERT. Показательным является следующее замечание, содержащееся в справочнике: "В настоящее время существуют два общепринятых способа оценки времени для каждого вида деятельности в сети. Согласно одному методу дается одиночная оценка времени, согласно другому - три оценки времени, которые затем преобразуются в одиночную с помощью статистической бета-аппроксимации. . . . Решение использовать метод одиночной оценки времени или трех оценок времени принимается руководителем программы согласно инструкциям, выпущенным правительственными учреждениями". [89].

System Lab

system-laboratory.ru