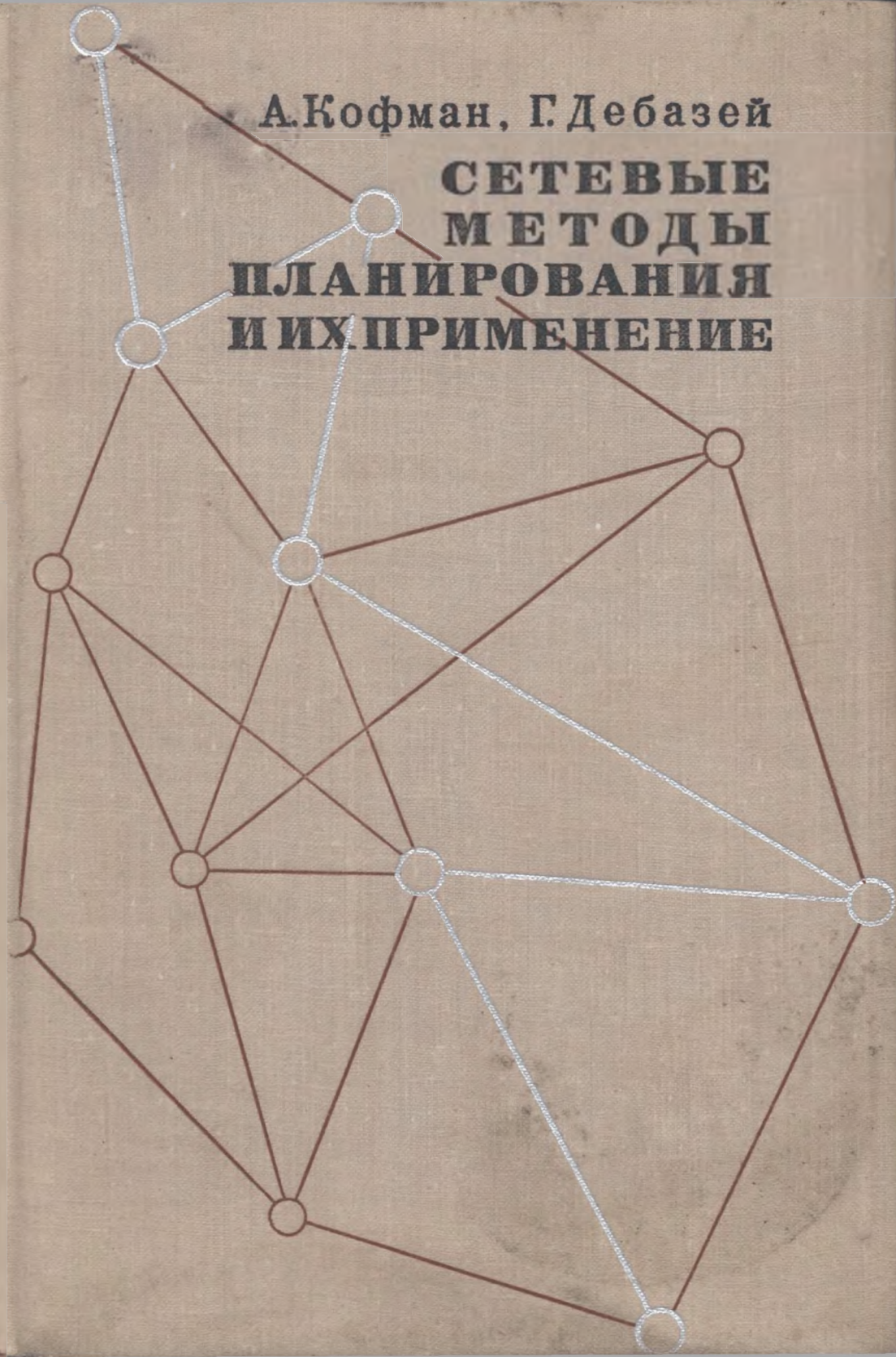


А. Кофман, Г. Дебазей

**СЕТЕВЫЕ
МЕТОДЫ
ПЛАНИРОВАНИЯ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ**



LA MÉTHODE DU CHEMIN CRITIQUE

Application aux programmes de production
et d'études de la méthode P.E.R.T.
et de ses variantes

Par

A. KAUFMANN

Professeur à l'institut polytechnique
de Grenoble. Conseiller scientifique à la
C^{ie} des Machines Bull

G. DESBAZEILLE

Ingénieur civil des Mines

PRÉFACE DE E. VENTURA

*Directeur de la Société d'Etudes pratiques
de Recherche Opérationnelle*

DUNOD

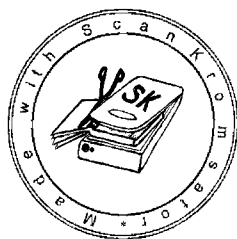
PARIS 1964

А.Кофман, Г.Дебазей

СЕТЕВЫЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ

Применение системы ПЕРТ
и ее разновидностей
при управлении производственными
и научно-исследовательскими
проектами

Перевод с французского



Издательство «Прогресс»

Москва - 1968

Переводчик: В. З. Беленький

Редактор: А. И. Тейман

В книге рассматриваются вопросы теории сетевых методов планирования и управления (СПУ), представляющих один из разделов современной теории управления большими системами. Она дает представление об основных методах построения сетевых моделей комплексов операций, их анализа и описание методов оптимизации стоимости реализации комплексов. Основные теоретические положения иллюстрируются в книге на практических примерах.

Сочетание математической строгости с простотой изложения делают книгу ценной и доступной для широкого круга читателей, самостоятельно изучающих методы СПУ.

Редакция литературы по экономике

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В предлагаемом читателю русском переводе книги А. Кофмана и Г. Дебазея «Сетевые методы планирования и их применение» рассматриваются вопросы, относящиеся к одному из разделов современной теории управления большими системами — к теории сетевых методов планирования и управления (СПУ). Один из авторов книги, А. Кофман, уже известен нашим читателям по русским переводам его книг, в которых описываются различные проблемы исследования операций. Настоящая работа содержит изложение основных методов построения сетевых моделей комплексов операций, их анализа и описание методов оптимизации стоимости реализации комплексов.

Несомненным ее достоинством является то, что в ней рассматривается ряд проблем теории СПУ, отсутствующих в книгах других авторов. Так, например, описываются различные обобщения метода ПЕРТ, излагаются задачи оптимизации при случайной длительности операций и ряд других вопросов.

Вместе с тем необходимо иметь в виду, что некоторые аспекты рассматриваемой проблемы авторами не затрагиваются. Так, в книге почти совсем не освещены вопросы, связанные с построением системы СПУ, со сбором, передачей и хранением информации в таких системах, с использованием различных технических средств, со структурой системы СПУ, с ее органами управления и службами. Только во второй главе, да и то лишь вскользь, говорится о создании системы СПУ и приводится только общая схема управления в системе СПУ. Не касаются авторы и вопросов оптимизации по нестоимостным критериям, а также задач распределения ресурсов дискретного вида и задач распределения ресурсов времени.

Книга А. Кофмана и Г. Дебазея начинается с изложения основных понятий и определений теории графов — одной из основных математических дисциплин, используемых в теории СПУ. Этому посвящена первая глава книги. В ней приводятся основные сведения, необходимые читателю для дальнейшего

понимания рассматриваемых в книге вопросов. Внимательный читатель почерпнет здесь весьма полезные сведения по теории графов, которые позволяют ему свободно разбираться в ряде книг и статей, изданных по вопросам СПУ и требующих определенного запаса знаний из области теории графов, а также дадут в случае необходимости возможность приступить к самостоятельному изучению этой теории по более фундаментальным книгам.

Во второй главе рассматриваются основные понятия и методы теории СПУ. В ней описываются правила представления комплекса в виде сети, даются определения основных параметров сетей, приводятся различные алгоритмы и вычислительные схемы, исследуются случаи детерминированных и стохастических сетей и приводится большое число практических примеров, иллюстрирующих основные методы, описанные авторами.

Обобщению метода ПЕРТ, связанному с использованием альтернативных сетей, посвящена глава 3. Здесь излагаются в основном результаты Эйснера¹.

В главе 4 рассматриваются задачи оптимизации стоимости реализации комплекса операций. Описывается общая постановка задачи оптимизации комплекса по критерию минимума стоимости и излагаются основные идеи решения этой задачи. Алгоритм Фулкерсона решения стоимостной задачи приводится дважды: один раз в чисто теоретическом аспекте, другой — с точки зрения его практического применения. Второй аспект освещается очень подробно. Авторы книги стремились донести до читателя весь механизм работы алгоритма, чтобы дать ему возможность самостоятельно строить алгоритмы подобного типа. Весьма подробно с этой же целью в главе 4 рассматривается численный пример, иллюстрированный большим числом рисунков. Несомненным достоинством этой главы является изложение задачи оптимизации стоимости операций со случайной длительностью. Хотя описанный авторами подход является довольно спорным, подобные постановки задач надо всячески приветствовать, ибо они больше всего приближаются к условиям реальной действительности.

В предлагаемом в конце приложения содержатся весьма полезные сведения о β -распределении — основном распределении, применяемом при оценке продолжительности выполнения операций. В приложении описывается также улучшенная оцен-

¹ H. A. Eisner, A Generalized Network Approach to the Planning and Scheduling of a Research Program, *Operations Research*, Vol. 10, № 1, 1962.

Эти вопросы рассматриваются также в статье С. Е. Элмаграби «Алгебра для анализа обобщенных сетевых планов», перевод которой опубликован в виде приложения к книге Р. В. Миллера «ПЕРТ — система управления» (Издательство «Экономика», М., 1965, перевод с английского). Оригинал статьи в журнале «Management Science», Vol. 10, № 3, 1964.

ка среднего времени реализации комплекса, предложенная Фулкерсоном, и задача разбиения операции на части.

Авторы попытались сочетать в книге достаточную математическую строгость с простотой и ясностью изложения, с подробным рассмотрением основных идей и содержания предлагаемых методов решения различных задач, относящихся к теории СПУ. Это делает ее доступной и для читателя, математически менее подготовленного, который при затрате определенных усилий сможет разобраться в ее достаточно сложном математическом аппарате и использовать его при решении соответствующих задач. Доступности книги для более широких кругов читателя способствует также то, что изложение материала сопровождается в ней приведением очень большого количества графиков и таблиц, облегчающих понимание сравнительно сложного математического содержания книги.

Книга А. Кофмана и Г. Дебазея будет, несомненно, с интересом встречена всеми, кто занимается различными проблемами управления комплексами операций, а также разработкой и внедрением систем СПУ в различных областях народного хозяйства.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ФРАНЦУЗСКОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая работа является в высшей степени полезной, и издание ее весьма своевременно. Мы надеемся, что она получит распространение среди самого широкого круга читателей.

Любопытство и интерес, возбуждаемые во всем мире системой ПЕРТ или методом критического пути («Critical Path Scheduling»), объясняются многими причинами. Я склонен считать, что успех этого метода в значительной степени объясняется тем, что он в отличие от других методов исследования операций не требует предварительного математического образования и понятия, с которыми приходится сталкиваться при его применении, воспринимается достаточно интуитивно. Благодаря этому он легко усваивается, что способствует его популярности.

С другой стороны, разумеется, для такой популярности необходимо было, чтобы этот метод отвечал потребностям, реально и повседневно ощущаемым всеми, кто имеет дело с выполнением проектов или крупных комплексов работ. И это действительно так, потому что недостаточность классической диаграммы Ганта стала совершенно очевидной.

Книга Кофмана и Дебазея имеет, на мой взгляд, одно очень существенное достоинство: это как раз та книга, которая необходима практическим работникам.

После первой главы, содержащей краткие сведения из теории графов и проблемы упорядочения, авторы вводят конкретные и фундаментальные понятия предшествования и следования операций, их длительностей, сроков наступления событий, резервов операций (полных, свободных, независимых), которые будут легко восприниматься практиками на основе имеющегося у них собственного опыта. Затем следует несколько важных численных примеров, благодаря которым описанные алгоритмы теряют свой непонятный и трудно усваиваемый характер. Мы настоятельно советуем читателям не пожалеть времени и с ка-

рандашом в руке изучить конкретный пример, заимствованный у Пако, а также его различные варианты.

Введение понятия случайности при рассмотрении продолжительности выполнения операций, предполагавшихся сначала детерминированными, приводит к рассмотрению в двух первых главах средних значений длительностей операций и дисперсий, которые аддитивны в предположении независимости распределений и отсутствия ошибок в последовательно производимых оценках.

Глава III обобщает метод ПЕРТ, вводя стохастическую модель, применяемую, в частности, в случаях отсутствия предварительного опыта, позволяющего построить строго детерминированную сеть.

Глава IV, в которой излагается оптимизация стоимости и продолжительности выполнения операций, является наиболее разработанной и наиболее интересной. Общая задача сводится к задаче параметрического линейного программирования, после чего применяется принцип двойственности, и в параграфе 28 излагается алгоритм Фулкерсона. Если теоретический аспект покажется несколько сложным и трудно воспринимаемым, надо, чтобы читатель, прежде чем возвращаться к нему после первого чтения, постарался бы проследить шаг за шагом за изложением примера практического характера в параграфе 30, занимающего важное место в настоящей работе и представляющего собой один из ее ключевых элементов. Большая часть четвертой главы посвящена оптимизации проекта в условиях, когда длительности операций детерминированы. Только на последних страницах вводится понятие случайности и кратко исследуется зависимость между средней продолжительностью операции и ее стоимостью в предположении, что среднее время операции и его среднеквадратическое отклонение линейно связаны со стоимостью операции. На данной стадии мы не располагаем ничем более точным, ничем, что более полно отражало бы сложность реальной действительности. Вопросы, относящиеся к дальнейшей разработке такого рода проблем, обсуждаются в последнее время на каждом конгрессе, во всех периодических изданиях по исследованию операций.

Предлагаемая книга может быть прочтена и усвоена самым широким кругом людей.

Мы надеемся, что в нашей стране будет осознано значение огромных возможностей и гибкости метода ПЕРТ, известность которого в США сегодня такова, что государственные органы принимают к рассмотрению только те предложения фирм, для которых представляется сеть проекта, основанная на этом методе.

В заключение я процитирую несколько слов, слышанных мной из уст генерального директора одной из крупных компа-

ний Испании — страны, где я был приятно удивлен, обнаружив там определенные достижения в области применения метода ПЕРТ: «После того, как мы использовали недавно метод ПЕРТ при строительстве промышленного здания, на нашем заводе ни один новый проект не разрабатывается без составления сети ПЕРТ, осуществляемого в тесном сотрудничестве инженеров проектного бюро и специалистов по исследованию операций. Если бы мы знали об этом методе и применяли его раньше, мы, безусловно, избежали бы многих ошибок, колебаний, столкновений различных интересов и много выиграли бы как во времени, так и в деньгах, а также в сплоченности коллектива наших инженеров».

Э. Вантюра

ОТ АВТОРОВ

Среди методов, разработанных за последние годы с целью составления проектов производства или исследований и наблюдения за их выполнением, «сетевые методы планирования», базирующиеся на идее критического пути, занимают ведущее место благодаря простоте, эффективности и богатству возможностей, которые не перестают в них обнаруживаться. Будь то американский метод ПЕРТ, или французский метод потенциалов, или различные их варианты, предлагаемые почти повсеместно, — математической основой всех этих методов служит теория графов, которая сама в свою очередь является важной частью теории множеств. Несомненно, что инженеры, организаторы производства, предприниматели, плановики и вообще все лица и группы лиц, несущие ответственность за разработку и контроль проектов, смогут оценить возможности, открывающиеся благодаря сетевым методам планирования; настоящая работа является попыткой продемонстрировать им ценность этих методов. Методы эти не универсальны, и многие проблемы не могут быть решены при их помощи. По мере того как открываются и внедряются новые методы организации и планирования, обнаруживается также, что вновь возникающие проблемы требуют или более совершенных, или совсем других алгоритмов. Проблемы современного мира, усложняющиеся изо дня в день, вызывают необходимость научного подхода, который дал бы возможность ориентироваться в сложном комплексе возникающих трудностей, причем это в равной мере относится как к малым, так и к средним и крупным работам. Можно констатировать, что в США уже даже совсем небольшие предприятия используют метод ПЕРТ. Что же касается крупных предприятий, то все они имеют специальные службы, занимающиеся организацией работ, основывающейся на применении метода ПЕРТ, часто при помощи мощных электронных вычислительных машин. Прошло всего пять лет с тех пор, как система ПЕРТ

(PERT, Program Evaluation Research Task)¹ была использована ее американскими создателями для проведения программы исследовательских и конструкторских работ, связанных с созданием известной ракеты «Поларис». Однако пройденный с тех пор путь является очень значительным и в настоящее время не появляется ни одного номера журнала по исследованию операций или по научному управлению, где нельзя было бы найти хотя бы одной статьи на эту тему, где не предлагалось бы дальнейшего развитие этих методов.

Мы рекомендуем читателям настоящей работы продолжить изучение ими проблем организации, обратившись к очень большой литературе, имеющейся по интересующим их вопросам, как теоретическим, так и практическим. Эти усилия обеспечат им экономию времени и денег.

Область, в которой осуществляется современная человеческая деятельность, не обладает только лишь пространственными или только лишь временными измерениями. Эта деятельность координируется в пространстве и времени, где все представляет собой движение и приспособление. Математики и инженеры предоставляют нам средства ориентироваться в этих измерениях, и нам не следует отказываться от этих средств, кичась своей интуицией. Интуиция имеет очень большое значение, но мы должны помочь ей и дополнить ее при помощи соответствующих исследований.

А. Кофман и Г. Дебазей

¹ Или «Program Evaluation and Review Technique». Первым опубликованным документом об этом методе был следующий: PERT—Phase I and II — Summary Report 1958 — Special Project Office. Dept. of Navy, Washington D. C. Есть русский перевод: «Краткий отчет по I этапу разработки ПЕРТ», пер. с английского. М., 1964, стр. 68 (Государственный комитет по радиоэлектронике СССР, НИИТЭИР П — 223117).— *Прим. ред.*

Г Л А В А 1

ГРАФЫ И УПОРЯДОЧЕНИЕ

1. Введение

Предметом нашего рассмотрения, как это будет видно, является множество элементов, между которыми существуют ориентированные связи. Не вдаваясь в теоретические аспекты, относящиеся к исследованию порядковых соотношений в графе, мы считаем целесообразным напомнить некоторые понятия теории графов и показать, как могут быть использованы различные приемы, позволяющие реализовать порядковые соотношения. Мы ограничимся лишь тем, что является существенным при изучении приемов упорядочения, связанных с методом критического пути.

В первой главе мы определим сначала понятия вершины, дуги, пути, контура; затем мы введем понятие порядка. Цель этого предварительного изучения состоит в том, чтобы научиться проводить исследования порядка выполнения операций, о которых мы знаем только то, что одни из них должны предшествовать другим.

2. Граф

Рассмотрим множество, состоящее из конечного числа элементов¹, которые мы обозначим буквами $X_1, X_2, \dots, X_n$, а само множество — буквой X ; запишем это символически:

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}. \quad (2.1)$$

Каждому элементу X_i , принадлежащему X , поставим в соответствие нуль, один или несколько элементов из X ; мы построим тогда, пользуясь терминологией теории множеств,

¹ Нас интересуют здесь графы, состоящие только из конечного числа элементов, хотя в теории графов рассматриваются также и бесконечные графы.

некоторый «граф». Обозначив через Γ закон, представляющий данное соответствие, запишем граф символически

$$G = (X, \Gamma). \quad (2.2)$$

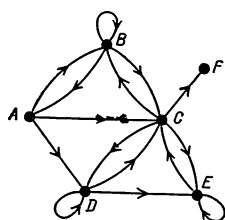


Рис. 2.1.

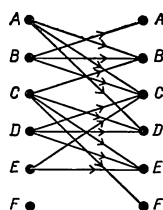


Рис. 2.2.

Таблица 2.1

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	0	0
B	1	1	1	0	0	0
C	0	1	0	1	1	1
D	0	0	1	1	1	0
E	0	0	1	0	1	0
F	0	0	0	0	0	0

Возьмем пример для иллюстрации этого определения, которое может показаться в какой-то мере абстрактным.

Пусть мы имеем множество из 6 элементов

$$X = \{A, B, C, D, E, F\} \quad (2.3)$$

и рассмотрим следующее соответствие, определенное с помощью символа Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma A &= \{B, C, D\}, \quad \Gamma B = \{A, B, C\}, \quad \Gamma C = \{B, D, E, F\}, \\ \Gamma D &= \{C, D, E\}, \quad \Gamma E = \{C, E\}, \quad \Gamma F = \emptyset, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где символ $\emptyset$ означает, пользуясь терминологией теории множеств, пустое множество и аналогичен нулю при числовой нумерации.

Граф может быть представлен с помощью чертежа, как это сделано на рис. (2.1). Это называется «представлением графа с помощью направленных дуг». Граф может быть представлен также, как это показано на рис. (2.2), или, наконец, с помощью таблицы с двумя входами или матрицей (таблица 2.1).

В теории множеств «графом» называют всякое отображение множества в себя; символ Γ представляет это отображение.

Вершина

Элемент множества, образующего граф, называется «вершиной». На рис. (2.1) элементы A, B, C, D, E и F представляют собой вершины графа. Некоторыми авторами вершина называется также «точкой».

Дуга

Ориентированная пара (X_i, X_j) вершин X_i и X_j называется «дугой». Так, см. рис. (2.1), (A, B) , (B, A) , (A, C) , (E, E) , (C, F) представляют собой дуги.

Обозначим через U множество дуг; тогда в нашем примере

$$U = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, B), (B, C), (C, B), (C, D), \\ (C, E), (C, F), (D, C), (D, D), (D, E), (E, C), (E, E)\}. \quad (2.5)$$

Граф может обозначаться через

$$G = (X, \Gamma) \text{ или } G = (X, U),$$

что безразлично.

Путь

Это последовательность сцепленных дуг, позволяющих пройти из одной вершины в другую; так, (A, B, C, F) , (A, C, D, E, C, F) , (A, B, A) , (A, D) , (A, B, B, C) представляют собой пути, см. рис. (2.1).

Контур

Это путь, начальная вершина которого совпадает с конечной. Так, (A, C, B, A) , (A, D, E, C, B, A) , (A, C, B, A, C, B, A) , (A, B, A) , (B, B) являются контурами, см. рис. (2.1).

Петля

Это дуга, начало и конец которой совпадают; (B, B) , (D, D) и (E, E) представляют собой петли, см. рис. (2.1).

Длина пути или контура

Это число дуг пути или контура. Так, длина (A, B, C, F) равна 3, длина (A, D, E, C, B, A) равна 5.

Если две вершины графа соединены дугой, начинающейся в любой из них, то говорят, что между этими вершинами есть ребро. Поэтому понятие ребра эквивалентно понятию «неориентированного» графа.

Например, на рис. (2.1)

между A и D есть ребро;

» A и B » »

Нет ребра между B и D .

Ребро обозначается $\overline{(A, D)}$ или $\overline{(A, B)}$; множество ребер обозначим $\bar{U}$. Так, в нашем примере, см. рис. (2.1),

$$\bar{U} = \{ \overline{(A, B)}, \overline{(A, C)}, \overline{(A, D)}, \overline{(B, C)}, \overline{(C, D)}, \overline{(C, E)}, \overline{(C, F)}, \overline{(D, E)} \}. \quad (2.6)$$

Цепь

Это последовательность сцепленных ребер, т. е. последовательность дуг, сцепленных без учета их ориентации. Так, на рис. (2.1) (B, C, A, D, E) не есть путь (из-за дуги AC), но это цепь. Всякий путь является, очевидно, цепью, но, как мы только что видели, цепь не всегда является путем.

Связный граф

Граф называется «связным», если между всякой парой его вершин существует хотя бы одна цепь. Граф на рис. (2.1) связан. Граф «сильно связан», если между всякой парой его вершин существует хотя бы один путь. Граф на рис. (2.1) не является сильно связным (не существует путей от F к другим вершинам).

«Антисимметричный» граф

Рассмотрим множество U дуг графа. Если для всякой дуги (X_i, X_j) , принадлежащей U , дуга (X_j, X_i) , т. е. противоположная ей, не принадлежит U , то говорят, что граф «антисимметричен». В силу этого определения антисимметрический граф не может содержать петель.

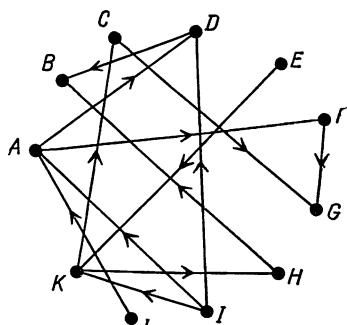
Например, граф на рис. (2.3) «антисимметричен».

Граф без контуров

В настоящей работе нас интересует специальный случай графов без контуров, т. е. не содержащих ни одного контура; такой случай представлен на рис. (2.3).

Очевидно, что всякий граф без контура антисимметричен, но обратное неверно.

Читатель, знакомый с теорией графов, будет удивлен, имея в виду широту этой теории, что мы ограничились лишь очень немногими понятиями. Но мы считаем целесообразным остановиться лишь на самой необходимой для логического описания концепции, приводящей к методу критического пути, который и является предметом данной работы.



Р и с. 2.3.

Таблица 2.2

Матрица, соответствующая графу, представленному на рис. (2.3). Нули в этой матрице опущены

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A				1		1					
B											
C							1				
D		1									
E											1
F							1				
G											
H		1									
I	1			1							1
J	1										
K			1					1			

3. Отношение строгого порядка в связном графе без контуров

Рассмотрим следующее отношение между двумя различными вершинами X_i и X_j связного графа без контуров: положим $X_i < X_j$, если существует путь ненулевой длины от X_i к X_j .

Это отношение обладает следующими свойствами:

- 1) оно «антисимметрично»: из $X_i < X_j$ следует, что не может быть $X_j < X_i$, так как в противном случае мы имели бы контур;
- 2) оно транзитивно: если $X_i < X_j$ и $X_j < X_k$, то $X_i < X_k$; это очевидное следствие из определения пути.

Таким образом, во всяком связном графе без контуров можно установить отношение строгого порядка благодаря свойству «существует путь из X_i в X_j »; X_i называется «предком» X_j , а X_j — «потомком» X_i , если существует путь от X_i к X_j .

Пример, см. рис. (2.3)

I есть предок B ; $I < B$,

G есть потомок I ; $I < G$.

Теперь сосредоточим наше внимание на следующей частной, но важной задаче.

Разбить все вершины связного графа без контуров на слои¹ так, что

а) все элементы данного слоя не имеют предков в следующем слое; элементы первого слоя не имеют предков, а элементы последнего — потомков;

б) порядок вершин внутри одного и того же слоя безразличен, т. е. эти вершины не соединены между собой дугами.

Метод, используемый для этого, мы опишем ниже. Разбиение на такие слои всегда существует.

4. Разбиение связного графа без контуров на слои

КАК УПОРЯДОЧИТЬ СЛОИ

Возьмем опять для примера граф на рис. (2.3); его можно разбить на 4 слоя, см. рис. (4.1); каждый слой содержит вершины, не соединенные между собой никакими дугами; как был получен этот результат? Мы приведем два метода.

¹ Эти слои определяют значения порядковой функции графа. Мы здесь умышленно оставляем в стороне понятие порядковой функции; оно привело бы читателя к более глубокому изучению теории графов, чем это необходимо для целей настоящей работы.

Рассмотрим матрицу, представляющую граф на рис. (2.3). Она приведена в таблице 2.2. Обозначим через $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C, \dots, \vec{V}_K$ векторы, являющиеся столбцами этой матрицы. Вычислим

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_A + \vec{V}_B + \vec{V}_C + \dots + \vec{V}_K$$

и припишем этот результат справа к матрице, как показано в таблице 4.1. Этот вектор $\vec{V}_0$ содержит некоторое число нулей, в данном случае два в строках B и G ; это означает, что эти две вершины не имеют потомков, они образуют слой 0.

Теперь вычислим вектор

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 - \vec{V}_B - \vec{V}_G,$$

где появятся четыре новых нуля, соответствующих вершинам C, D, F, H , которые образуют слой 1.

Затем вычислим

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_C - \vec{V}_D - \vec{V}_F - \vec{V}_H,$$

где появятся два новых нуля, соответствующих вершинам A и K , которые образуют слой 2.

Наконец, вычислим

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 - \vec{V}_A - \vec{V}_K,$$

где появятся три новых нуля, соответствующих вершинам E, I и J , которые образуют слой 3. На этом вычисления заканчиваются, так как $\vec{V}_3$ состоит из одних нулей.

Для доказательства используемого метода достаточно заметить, что на каждом этапе вычислений находятся вершины без потомков².

Обратная нумерация приведет к порядку I, II, III, IV, представленному на рис. (4.1).

¹ Этот метод предложен Демукроном (M. Demoucron), инженером компании «Булль», производящей вычислительные машины.

² При выполнении вычислений на электронных вычислительных машинах необходимо на главной диагонали булевой матрицы поместить единицы, чтобы различать нули (0) и пустые места (X). Тогда нули становятся единицами и X становятся нулями.

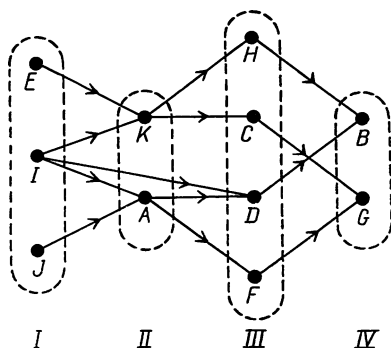
Таблица 4.1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	$\vec{V}_0$	$\vec{V}_1$	$\vec{V}_2$	$\vec{V}_3$
A				1		1						2	2	0	×
B												0	×	×	×
C							1					1	0	×	×
D		1										1	0	×	×
E											1	1	1	0	
F							1					1	0	×	×
G												0	×	×	×
H		1										1	0	×	×
I	1			1							1	3	3	2	0
J	1											1	1	1	0
K			1					1				2	2	0	×
Слой												0	1	2	3
Вершины												B G	C D F H	A K	E I J

Можно было бы взять матрицу, транспонированную¹ к матрице, приведенной в таблице 4.1, и, производя вычисления в обратном порядке, отыскивать вершины, не имеющие предков. Тогда мы получили бы другое множество слоев, которое могло

¹ То есть матрицу, полученную перестановкой строк и столбцов с одинаковыми индексами.

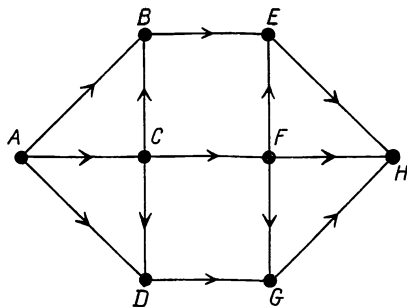
бы (в некоторых частных случаях) оказаться тем же, что и множество, полученное при отыскании вершин, не имеющих потомков.



Р и с. 4.1.

Другой пример

Возьмем граф на рис. (4.2). В таблице 4.2 приводятся сначала матрица, представляющая данный граф, а затем вычисленные последовательно значения



Р и с. 4.2.

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_A + \vec{V}_B + \dots + \vec{V}_H,$$

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 - \vec{V}_H,$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_E - \vec{V}_G,$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 - \vec{V}_B - \vec{V}_D - \vec{V}_H,$$

$$\vec{V}_4 = \vec{V}_3 - \vec{V}_C.$$

Таблица 4.2

	A	B	C	D	E	F	G	H	$\vec{V}_0$	$\vec{V}_1$	$\vec{V}_2$	$\vec{V}_3$	$\vec{V}_4$
A		1	1	1					3	3	3	1	0
B					1				1	1	0	×	×
C		1		1		1			3	3	3	0	×
D							1		1	1	0	×	×
E								1	1	0	×	×	×
F					1		1	1	3	2	0	×	×
G								1	1	0	×	×	×
H									0	×	×	×	×
Слой									0	1	2	3	4
Вершины									H	E G	B D F	C	A

Пять полученных слоев представлены на рис. (4.3).

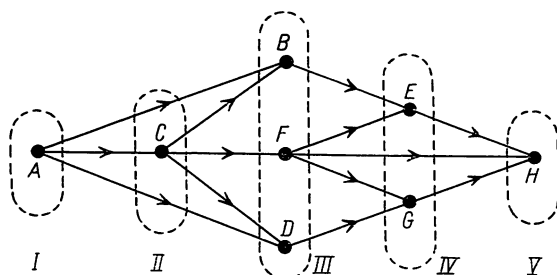


Рис. 4.3.

Для объяснения этого метода определим сначала понятие «транзитивного замыкания вершины X_i графа».

Транзитивным замыканием вершины X_i графа называется подмножество вершин графа, содержащее саму вершину X_i и те вершины, к которым существует путь из X_i . Рассмотрим, например, на рис. (2.3) вершину K ; транзитивное замыкание K есть $\{K, H, C, B, G\}$.

Для получения транзитивного замыкания каждой из вершин графа рассмотрим репрезентативную матрицу графа, к которой добавлены единицы по главной диагонали; умножим эту матрицу на себя, как это делается в матричном исчислении, а затем в получившейся матрице все ненулевые элементы заменим на единицы, а нули оставим без изменения. Эта матрица показывает нам, какие вершины соединены с другими вершинами путями длиной 0, 1 или 2. Умножим опять эту матрицу на себя и заменим ненулевые элементы на единицы. Полученная матрица укажет нам вершины, соединяемые путем длиной не более 4. Продолжаем так до тех пор, пока не перестанут появляться новые единицы; мы придем тогда к матрице, которая дает нам транзитивное замыкание каждой из вершин.

Прежде чем переходить ко второму этапу вычислений, покажем, как надо производить вычисления на примере рис. (4.2); для большей наглядности мы не будем вписывать нули и оставим соответствующие им клетки свободными, см. стр. 26.

Матрицу (4.2) возводим опять в квадрат, см. стр. 27.

Матрицу (4.4) также возводим в квадрат; но после замены ненулевых элементов единицами замечаем, что мы возвратились к матрице (4.4). Эта матрица дает транзитивное замыкание каждой из вершин. (Читатель мог бы получить его непосредственно, из чертежа графа, но в некоторых более сложных случаях при таком непосредственном определении по чертежу могут, конечно, встретиться трудности.)

Теперь в матрице, дающей транзитивные замыкания, выберем строки, содержащие одну и только одну единицу; соответствующие вершины отнесем к слою 0. Строки и столбцы, соответствующие этим вершинам, вычеркнем и в полученной подматрице опять проведем исключение элементов, соответствующих строкам, содержащим только одну единицу. И так далее, см. стр. 28.

Доказательство используемого метода очевидно. Каждая итерация исключает вершины без потомков. Этот метод более сложен, чем первый. Его применение целесообразно в тех случаях, когда транзитивное замыкание может быть легко исчислено.

4.1

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1				
B		1			1			
C		1	1	1		1		
D				1			1	
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1				
B		1			1			
C		1	1	1		1		
D				1			1	
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	3	2	3	1	1	1	
B		1			2			1
C		2	1	2	2	2	2	1
D				1			2	1
E					1			2
F					2	1	2	4
G							1	2
H								1

4.2

заменяем на

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1	1	1	1	
B		1			1			1
C		1	1	1	1	1	1	1
D				1			1	1
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

4.3

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1	1	1	1	
B		1			1			1
C		1	1	1	1	1	1	1
D				1			1	1
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

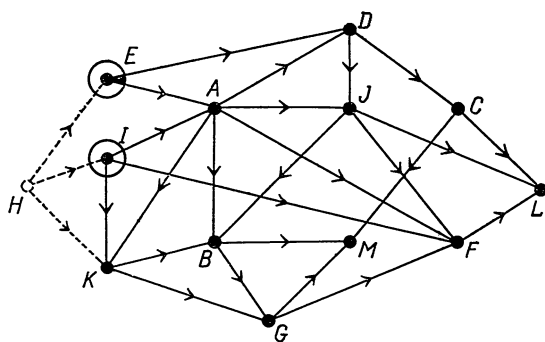
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1	1	1	1	
B		1			1			1
C		1	1	1	1	1	1	1
D				1			1	1
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	3	2	3	5	3	5	6
B		1			2			3
C		2	1	2	4	2	4	7
D				1			2	3
E					1			2
F					2	1	2	4
G							1	2
H								1

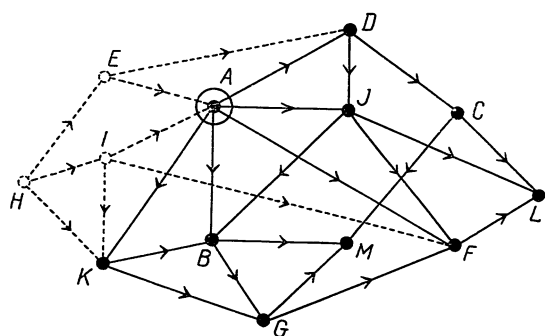
4.4

заменяем на

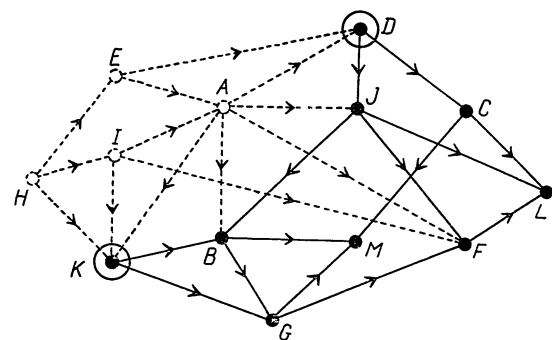
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1	1	1	1	1
B		1			1			1
C		1	1	1	1	1	1	1
D				1			1	1
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1



Р и с. 4.5.



Р и с. 4.6.



Р и с. 4.7.

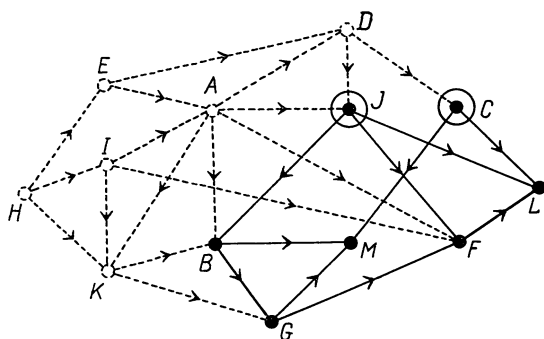


Рис. 4.8.

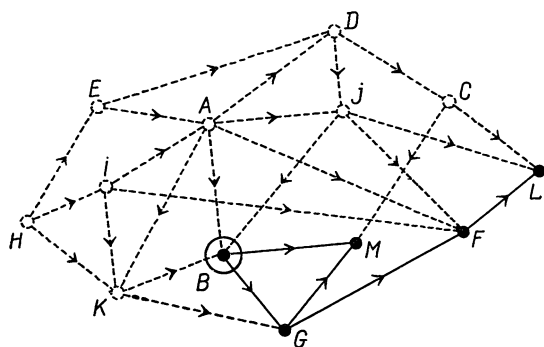


Рис. 4.9.

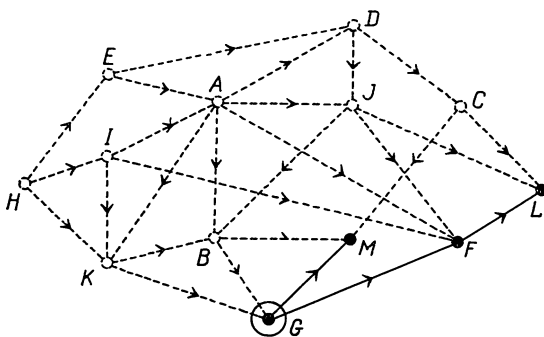


Рис. 4.10.

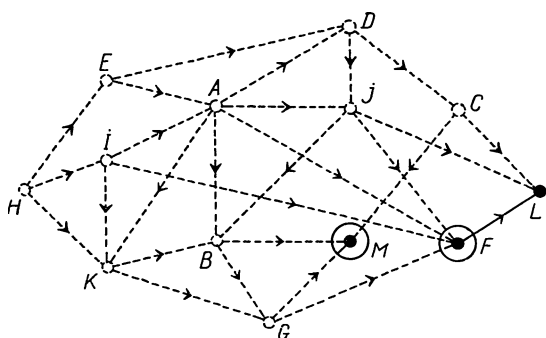


Рис. 4.11.

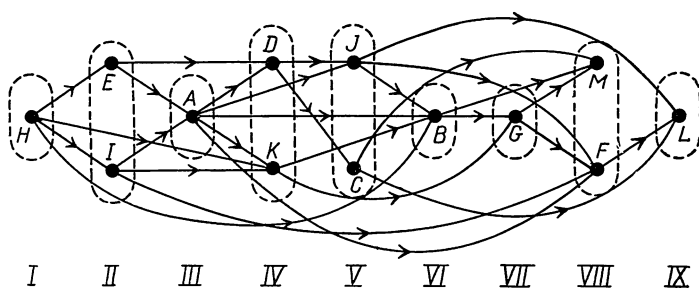


Рис. 4.12. Слои, полученные исключением предков.

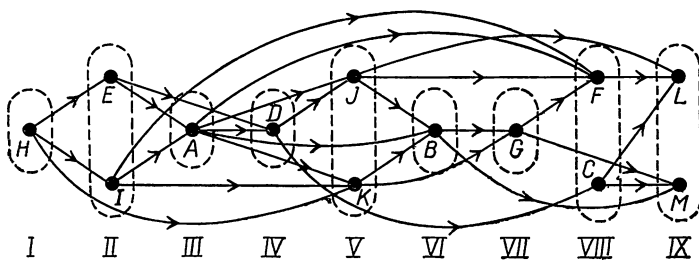


Рис. 4.13. Слои, полученные исключением потомков.

Как упорядочить дуги

Чтобы упорядочить дуги, т. е. разбить множество дуг на слои, можно использовать предыдущие методы после надлежащей их модификации. Обратимся опять к примеру, изображен-

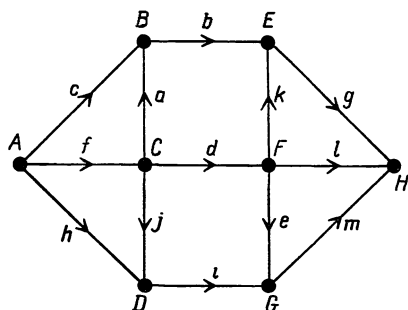


Рис. 4.14.

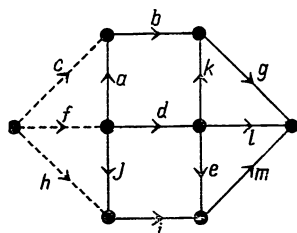


Рис. 4.15.

ному на рис. (4.2), который воспроизведен на рис. (4.14) с условным обозначением дуг малыми латинскими буквами. Чтобы

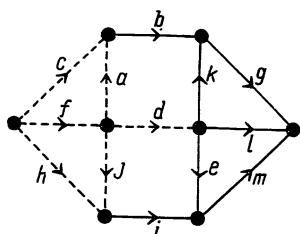


Рис. 4.16.

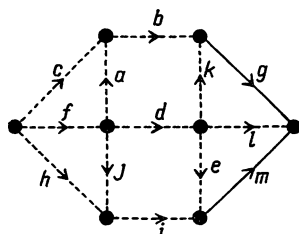


Рис. 4.17.

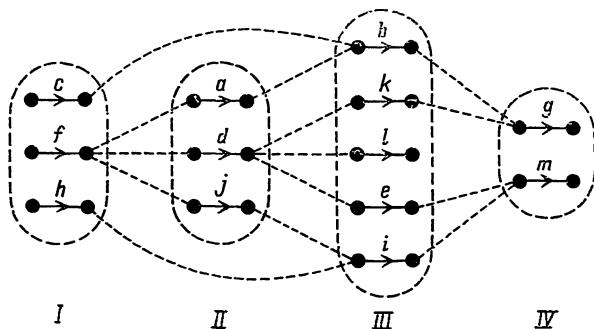


Рис. 4.18.

проследить за порядком вычислений, рассмотрим или матрицу, приведенную в виде таблицы 4.3, или три рисунка (4.15)—(4.17). Дуги c , f и h не имеют предков. Они образуют слой I, и в столбце $\vec{V}_0$ им соответствуют нули, содержащиеся в этом

столбце. Столбец $\vec{V}_1$ определяется из соотношения

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 - \vec{V}_c - \vec{V}_f - \vec{V}_h.$$

Найдем так же дуги a , d и j , которые не имеют предков, если исключить дуги c , f , h . И так далее...

Заметим, что разбиение множества дуг на слои зависит от того, с которой из вершин мы начинаем.

На рис. (4.18) приведен результат вычислений, произведенных с помощью матрицы, представленной в виде таблицы 4.3.

Таблица 4.3

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	$\vec{V}_0$	$\vec{V}_1$	$\vec{V}_2$	$\vec{V}_3$
a						1								1	0	×	×
b	1		1											2	1	0	×
c														0	×	×	×
d						1								1	0	×	×
e				1										1	1	0	×
f														0	×	×	×
g		1										1		2	2	2	0
h														0	×	×	×
i								1		1				2	1	0	×
j						1								1	0	×	×
k				1										1	1	0	×
l				1										1	1	0	×
m					1				1					2	2	2	0

5. Исследование упорядочения

Упорядочение вершин

Рассмотрим связный граф без контуров. Мы говорим, что мы «упорядочили вершины графа», если мы построили такую последовательность всех вершин графа, при которой порядок вершин удовлетворяет всем условиям предшествования, определяемым дугами графа. Такая последовательность есть не что иное, как некоторая перестановка вершин графа, удовлетворяющая всем условиям предшествования. Для построения «упорядоченной последовательности вершин» достаточно выбирать вершины в соответствии с порядком слоев, определенным в предыдущем параграфе.

Примеры

1) Рис. (2.3) и (4.1).

EJIKACDHFVBG, IJEAKHCDFGB

— упорядоченные последовательности вершин графа.

2) Рис. (4.4), (4.12), (4.13)

HEIAKDJCGBFML рис. (4.12)

и

HEIADKJBGCFLM рис. (4.13)

представляют собою упорядоченные последовательности вершин графа, изображенного на рис. (4.4).

Заметим, что описанные нами способы нахождения слоев не дают возможности перечислить все перестановки, удовлетворяющие условиям предшествования, определяемым графом; для целей настоящей работы это перечисление не представляет интереса. Однако такое перечисление, несомненно, может иметь значение в других задачах или при применении других методов.

Упорядочение дуг

Рассмотрим связный граф без контуров. Мы говорим, что упорядочили дуги, если мы построили такую последовательность всех дуг графа, при которой порядок дуг удовлетворяет всем условиям предшествования дуг относительно друг друга. Такая последовательность есть не что иное, как некоторая перестановка дуг, удовлетворяющая условиям их предшествования. Для построения упорядоченной последовательности дуг достаточно выбирать их в соответствии с порядком слоев дуг, определенным в предыдущем параграфе.

Пример, см. рис. (4.14) и (4.18),

chfdjakbleimg и *hcfadjbkleimg*

представляет собою упорядоченные последовательности дуг графа, изображенного на рис. (4.14).

Полное упорядочение связного графа без контуров

Говорят, что такой граф полностью упорядочен, если после

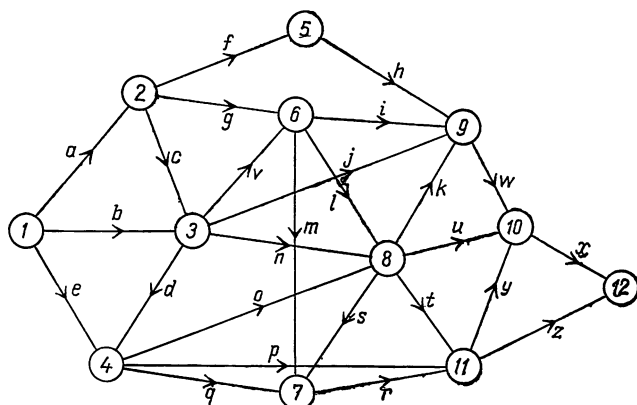


Рис. 5.1.

введения обозначений для его вершин и дуг и те и другие будут упорядочены.

Пример

Рассмотрим граф без контуров, изображенный на рис. (5.1).

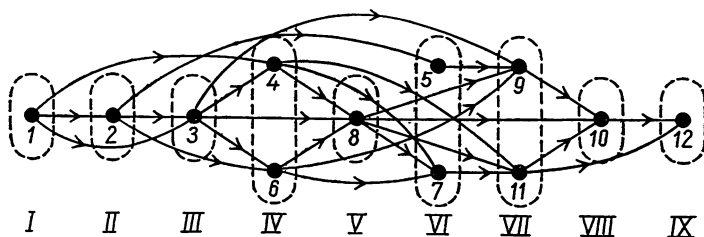


Рис. 5.2.

Мы показали, как определить слои; упорядоченной последовательностью вершин будет, например,

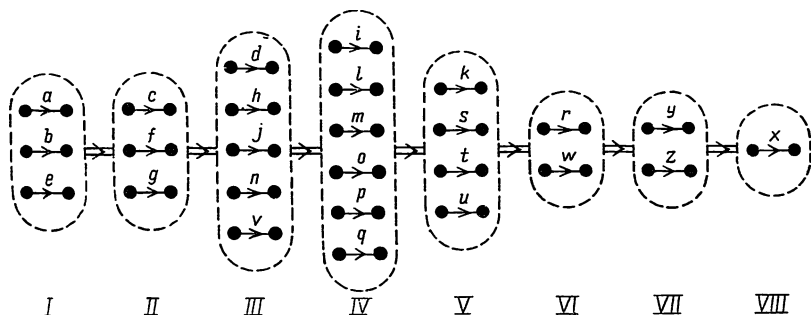
1, 2, 3, 6, 4, 8, 5, 7, 11, 9, 10, 12.

Остается упорядочить дуги. Действуя, как и раньше в пара-

Таблица 5.1

$\vec{V}_0$	$\vec{V}_1$	$\vec{V}_2$	$\vec{V}_3$	$\vec{V}_4$	$\vec{V}_5$	$\vec{V}_6$	$\vec{V}_7$	$\vec{V}_8$
3	3	3	3	3	3	2	1	0
3	3	3	3	2	2	1	0	×
4	4	4	3	3	2	0	×	×
3	3	3	2	1	0	×	×	×
1	1	1	0	×	×	×	×	×
3	3	3	2	1	0	×	×	×
1	1	1	0	×	×	×	×	×
4	4	3	1	0	×	×	×	×
1	1	0	×	×	×	×	×	×
1	0	×	×	×	×	×	×	×
2	1	0	×	×	×	×	×	×
0	×	×	×	×	×	×	×	×
12	10	9 11	5 7	8	4 6	3	2	1

графе 4, читатель легко разберется в том, как путем последовательного исключения дуг без предков получается результат, изображенный на рис. (5.3).

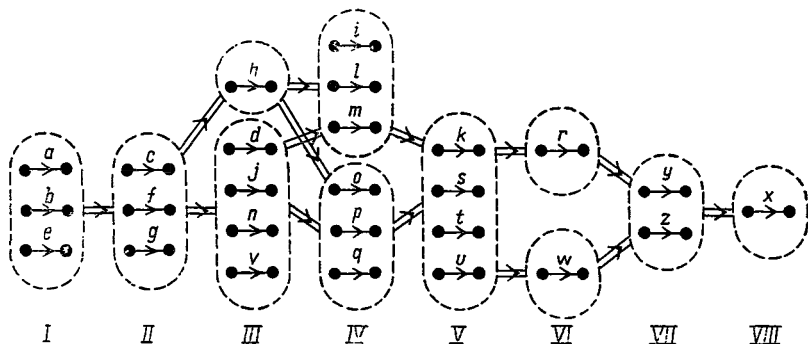


Р и с. 5.3.

Упорядоченной последовательностью дуг будет, например,

aebcfghjndomilopqksutrwzyx.

В некоторых случаях может представлять интерес разбиение слоев на подслои, в которые группируются дуги, имеющие одно и то же начало (рис. 5.4). Алгоритм, приведенный в параграфе 4 для использования при упорядочении дуг, надо лишь



Р и с. 5.4.

слегка модифицировать для того, чтобы получать подслои дуг, имеющих общее начало.

Значение полного упорядочения

Как будет видно в дальнейшем, мы будем иметь дело с проектами, содержащими самые разнообразные компоненты. Наряду с полностью заданными операциями эти проекты могут со-

держат целые запутанные «клубки», порядок следования операций в которых неизвестен, а заданы только некоторые ограничения, которые должны быть удовлетворены. Вот тогда-то и необходимо прежде всего построить граф проекта, представляющий известные связи, т. е. отношения обязательного предшествования. Если это сделано, становятся возможными другие важные исследования. Цель этой первой главы и состояла как раз в том, чтобы показать, как можно построить репрезентативную матрицу графа и подходящим образом перенумеровать вершины и дуги. Некоторые проекты приводят к графам, имеющим несколько тысяч операций и вершин; обработка этих данных на электронных вычислительных машинах требует прежде всего знания полной упорядоченности. Исследования таких комплексов приводят нас к следующему организационному принципу: все, что может быть упорядочено, должно быть упорядочено.

Теперь мы займемся графами, дугам которых приписаны определенные численные значения (интервалы времени, длительности и т. п.).

ПЛАНИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ИЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЕКТОВ

6. Введение

В этой главе мы покажем, как построить сеть (граф)¹ исследовательского, опытно-конструкторского или производственного проекта. Затем, вычислив критический путь, мы определим время завершения всего комплекса работ, резервы событий и операций в случае, когда длительности операций являются вполне определенными детерминированными величинами.

После этого мы разберем случай, когда длительности операций случайны, что, собственно говоря, и является предметом рассмотрения метода ПЕРТ.

Мы приведем различные алгоритмы, позволяющие вычислить критический путь (или критические пути) и резервы, имеющие важное значение. Наконец, мы рассмотрим вопросы, относящиеся к анализу таких сетей с помощью электронно-вычислительных машин.

7. Представление проектов (комплексов операций) с помощью сетей

В дальнейшем мы будем называть проектом (комплексом операций) совокупность операций, необходимых для достижения некоторой цели, длительность (детерминированная или случайная) каждой из которых нам известна и которые связаны отношением порядка (обязательным предшествованием).

Проект (комплекс операций) может быть представлен сетью, называемой «сетевой моделью проекта» или логической диаграммой, дуги которой представляют операции. Времена выполнения операций или длительности операций предполагаются известными и приписываются дугам как неотрицательные вели-

¹ В дальнейшем графы, описывающие комплексы операций (проекты), мы будем называть сетями. — *Прим. перев.*

чины¹. Вершины сети, называемые *событиями* и обозначаемые E_i , могут интерпретироваться как результаты выполнения отдельных частных задач (например, окончания монтажа блока). Если разбиение произведено слишком детально (при этом операции все более и более упрощаются, а их длительности уменьшаются), то в этом случае практическое значение рассматриваемых событий значительно снижается, за исключением тех из них, которые фиксируют основные этапы проекта. Длительность операции P_{ij} , участвующей в реализации события E_j , будет обозначаться t_{ij} . На приведенном ниже рис. (7.1) представлен некоторый проект.

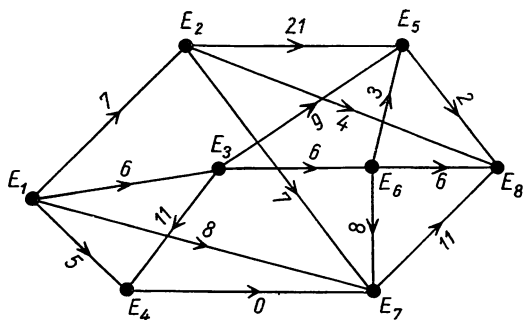


Рис. 7.1.

При построении сети необходимо для каждой операции знать операции, непосредственно предшествующие данной. Сеть выражает таким образом соотношения порядка, существующие в множестве операций. Заметим, что одни и те же порядковые соотношения или одна и та же сеть могут соответствовать нескольким различным проектам, если длительности операций будут различными.

Отметим, что отсутствие контуров в сети равносильно тому, что ни одна операция не следует после себя самой.

Первое, что нужно сделать, имея в виду применение метода критического пути, это составить перечень операций, который может быть детализирован в большей или меньшей степени в зависимости от точности, которую желательно получить. Операции надо стараться выбирать настолько простыми, насколько это возможно, и такими, чтобы времена операций были сравнимы по величине. Затем для каждой операции определяют предшествующие ей операции. Эта часть анализа работ является наиболее важной и часто занимает много времени. Она требует тесного сотрудничества всего персонала (инженеров, мастеров,

¹ Как будет видно дальше, иногда допустимы и отрицательные значения длительностей операций.

рабочих), заинтересованного в выполнении проекта, и несомненно является полезной даже сама по себе.

Для конкретизации мы возьмем пример строительства дачи. Чтобы построить дачу, необходимо выполнить определенное число операций; перечислим их в некотором порядке:

- a) разработка проекта,
- b) получение разрешения на строительство,
- c) подписание контракта,
- d) подвоз материалов к стройке (бетон, плиты, кирпич),
- e) подвод электричества и воды к стройке,
- f) фундамент,
- g) кирпичная кладка,
- h) плотницкие работы,
- i) покрытие,
- j) грунтовка,
- k) перегородки (из пустотелого кирпича),
- l) трубы (вода, центральное отопление, газ),
- m) внутренняя электропроводка,
- n) установка рам и окон,
- o) обработка стен и перегородок (цемент),
- p) установка двух дымовых труб,
- q) плиточная облицовка — санитарное оборудование — кухонный настил,
- r) штукатурка,
- s) установка штепселей и электрических выключателей,
- t) установка дверей и окон,
- u) покраска и оклейка обоев,
- v) установка котла центрального отопления и радиаторов,
- w) подвоз земли для сада,
- x) установка счетчиков и подвод радио, телевидения, телефона, воды,
- y) уборка строительной площадки,
- z) предварительный прием.

Обозначим через E_1 начальное событие (т. е. начало выполнения работ), а через E_2 — событие: контракт может быть подписан. Между E_1 и E_2 находятся две операции: составление плана и получение разрешения на строительство. Если административный порядок предполагает, что разрешение на строительство не может быть выдано без представления проекта (что обычно имеет место), поместим между E_1 и E_2 событие E_3 : разработка проекта закончена. После события E_2 можно приступить одновременно к операциям e и c с длительностями операций t_{24} и t_{25} . Действительно, подвод электричества и воды не есть, вообще говоря, дело подрядчика. Событие E_5 означает подписание контракта. После этого можно приступить к операции d с временем операции t_{54} . Операция f с временем t_{46} помещается после события E_4 , так как она может начаться только

после окончания операций d и e . Мы оставляем читателю самому продолжить построение сети, изображенной на рис. (7.2), выдвигая определенные гипотезы, которые ему кажутся правдоподобными, или консультируясь в случае необходимости со своими друзьями архитекторами. Пусть читатель не ищет интерпретации события E_7 , помещенного на рис. (7.2) только для

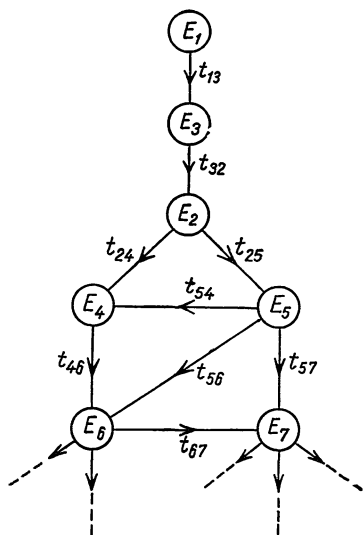


Рис. 7.2.

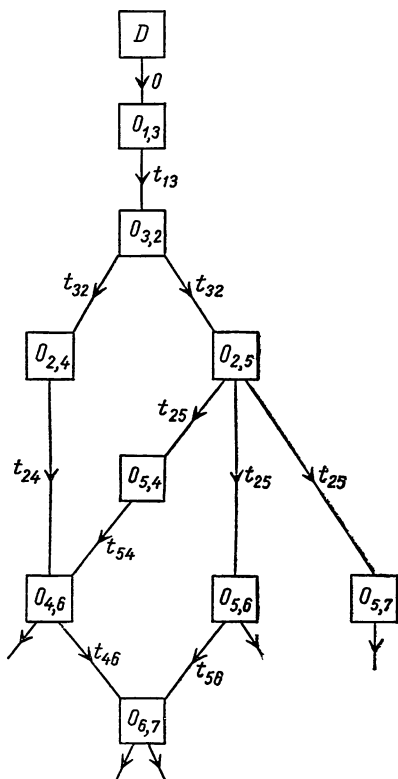


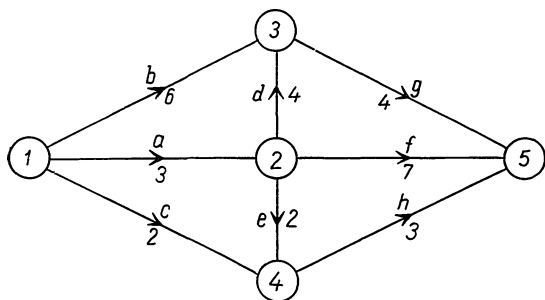
Рис. 7.3.

того, чтобы облегчить продолжение изложения. В рассматриваемой задаче о строительстве дачи длительности операций в общем случае представляют собой случайные величины. Поэтому, как мы уже говорили, необходимо уточнить, как будут применены и использованы такие случайные величины.

Представление проекта с помощью сети может быть сделано и другим образом. Будем изображать вершинами не события, а операции; дуги же используем для представления порядка, в котором операции O_{ij} и O_{jk} должны следовать так, чтобы можно было задавать сроки между началом O_{ij} и началом O_{jk} . В этом

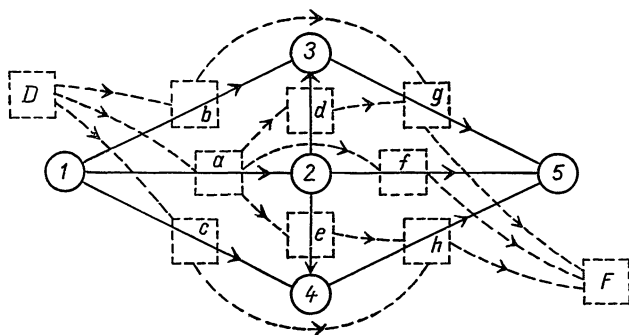
представлении принято называть «работами» то, что раньше мы называли операциями, и «связями» — дуги, которым приписаны сроки. На рис. (7.3) приведена сеть, соответствующая рис. (7.2) после такой замены.

Чтобы до конца разъяснить переход от одного представления к другому, возьмем другой пример — переход от рис. (7.4) к рис. (7.6)¹. Как видно на рис. (7.5) и (7.6), принято добавлять две работы D и F , представляющие начало (debut) и конец (fin)



Р и с. 7.4.

проекта. Рассматривая рис. (7.6), мы видим, что работа g помещается после работ b и d ; между g и b существует связь: g может начаться только тогда, когда пройдет 6 единиц времени после начала b ; между g и d существует связь: g может начаться только тогда, когда пройдет 4 единицы времени после



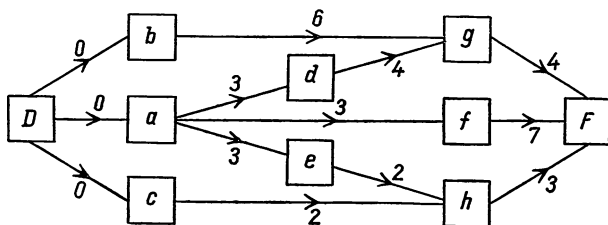
Р и с. 7.5.

начала d . В свою очередь работы d , f и e могут начаться только после того, как пройдет 3 единицы времени после начала a .

Оба представления обладают и преимуществами и недостатками. Обычно выбирают то или другое представление в зави-

¹ Некоторые рисунки этого параграфа заимствованы из статьи Б. Руа (B. Roy) [12].

симости от существа той задачи, для которой составляется проект. Заметим, однако, что представление «работы—связи» позволяет вводить в проект новые связи или изменять отношения порядка между работами простым добавлением дуг без перестройки сети в целом.



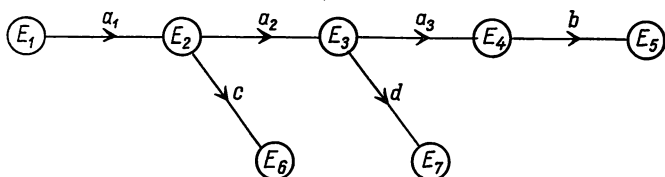
Р и с. 7.6.

Американцы используют в системе ПЕРТ представление «события—операции». Во Франции, особенно после опубликования работ Б. Руа, используют преимущественно представление «работы—связи»; соответствующий метод был назван Руа методом потенциалов.

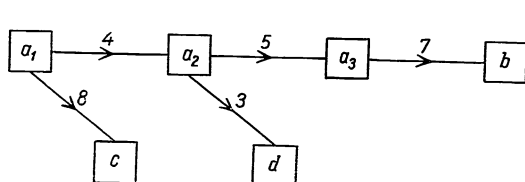
Теперь мы приведем несколько примеров различных ситуаций, которые могут встретиться при составлении сети проекта.

Составные операции

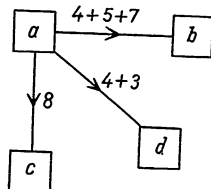
Рассмотрим операцию a , состоящую из трех элементарных операций: a_1 , a_2 и a_3 , см. рис. (7.7), и пусть операция c следует



Р и с. 7.7.



Р и с. 7.8.

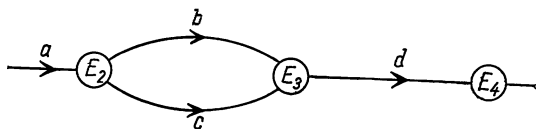


Р и с. 7.9.

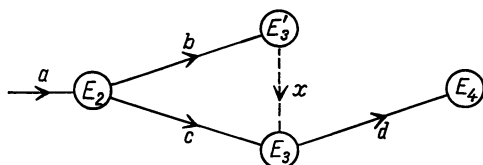
за a_1 , d следует за a_2 и b следует за a_3 . Рис. (7.8) представляет эту ситуацию в терминах «работы—связи». Рис. (7.9) показывает, что это представление можно упростить; исчисление новых связей не представляет трудностей.

Параллельные операции

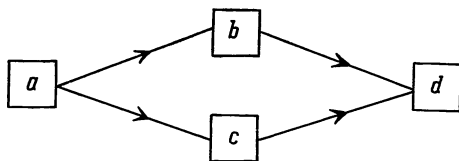
Предположим, что между двумя событиями E_i и E_j находятся две различные операции b и c , следующие за операцией a . Введем тогда фиктивное событие E'_j и дополнительную фиктивную операцию x между E'_j и E_j . В случае когда имеется три, четыре и т. д. параллельные операции, поступают так же, вводя



Р и с. 7.10.



Р и с. 7.11.

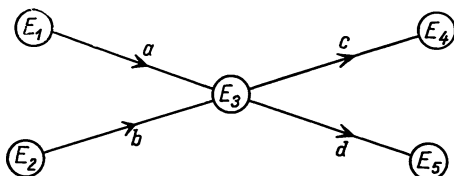


Р и с. 7.12.

для каждой из них фиктивное событие и дополнительную фиктивную операцию. В представлении «работы—связи», см. рис. (7.12), введение фиктивных событий и операций нецелесообразно.

Операции зависимые и независимые

Рассмотрим на рис. (7.13) операции c и d , следующие за a и b . Предположим теперь, что c следует за a и b , но d сле-



Р и с. 7.13.

дует только за b и не обязано следовать за a . В этом случае уже нельзя пользоваться данной сетью и необходимо ввести событие E'_3 и фиктивную операцию x , см. рис. (7.14).

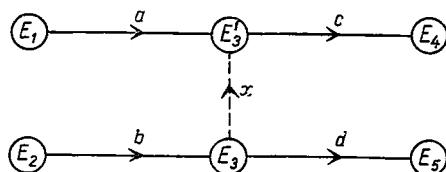


Рис. 7.14.

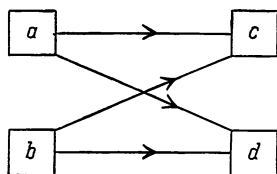


Рис. 7.15.

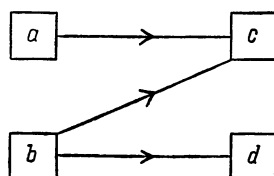


Рис. 7.16.

В представлении «работы—связи» нет необходимости вводить фиктивные события и операции. Рис. (7.15) соответствует рис. (7.13), а рис. (7.16)—рис. (7.14).

Особые ограничения. Условия на сроки начала выполнения операций

Предположим, что некоторая операция может быть начата только по наступлении какого-то момента, т. е. по прошествии некоторого срока после события E_1 , принимаемого за началь-

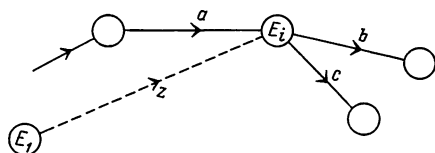


Рис. 7.17.

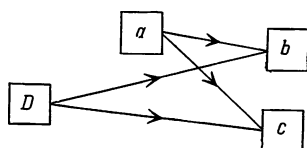


Рис. 7.18.

ное. Такое ограничение выражается введением фиктивной операции z между E_1 и событием E_i , где начинается рассматриваемая операция, см. рис. (7.17).

В другом представлении вводится связь между D и b , см. рис. (7.18).

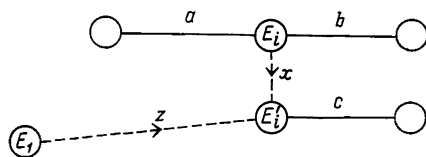
Рис. (7.19) и (7.20) относятся к случаю, когда приходится

вводить две фиктивные операции x и z : операция c , следующая за a , должна быть отсрочена на время z .

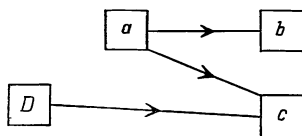
Во многих задачах встречаются некоторые «условия отсрочки начала выполнения операции»; ими могут быть, например, сроки поставки материалов, климатические условия и т. п. Как мы видим, такие особые условия легко могут быть введены в сеть.

Укажем также на другой тип встречающихся иногда ограничений: «Для того чтобы некоторая работа j могла быть начата, необходимо, чтобы время, прошедшее с момента начала другой работы i , было бы не больше данного срока t_{ij} ».

С помощью этих ограничений можно избежать нежелательных осложнений и обеспечить преемственность работ или их



Р и с. 7.19.



Р и с. 7.20.

одновременное выполнение. Для того чтобы иметь возможность учесть такие ограничения и ввести их в сеть, сформулируем их по-другому: «Для того чтобы некоторая работа i могла быть начата, необходимо, чтобы время, прошедшее с момента начала другой работы j , было не меньше данного ($-t_{ij}$)»; это приводит к обычным связям, но с отрицательной длительностью (длина соответствующей дуги будет отрицательна), что необязательно означает усложнение решения задачи.

Теперь мы займемся сроком завершения всех работ, и это подведет нас к основному содержанию настоящей работы — методу критического пути. Алгоритмы и различные методы, которые будут рассмотрены, одинаково применимы и в представлении «события—операции» и в представлении «работы—связи».

8. Время завершения комплекса операций. Критический путь

Когда сеть проекта построена, перед руководителем встает следующий вопрос: каково время завершения всего комплекса операций, т. е. какова продолжительность реализации проекта. Это время не может быть меньше суммы длительностей операций, взятой вдоль «самого неблагоприятного пути» из E_1 в E_n , т. е. вдоль такого пути между этими двумя точками, который

дает максимальную сумму длительностей операций¹. Такой путь (их может оказаться несколько) называется «критическим путем».

Это можно понять с помощью простейшей сети, изображенной на рис. (8.1). Событие E_3 означает выполнение трех операций P_{13} , P_{12} , P_{23} . Для того чтобы все эти операции могли быть реализованы, необходимо 8 единиц времени.

Беря в качестве продолжительности выполнения комплекса работ сумму длительностей операции вдоль «наименее благоприятного пути из E_1 в E_n », мы тем самым обеспечиваем возможность действительного выполнения всех намеченных операций с учетом их длительностей.

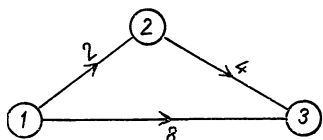


Рис. 8.1.

Вычисление момента реализации E_n сводится, таким образом, к отысканию в сети «самого длинного» или «критического» пути².

Математическая формулировка и различные алгоритмы, позволяющие решать эту проблему, будут изложены в § 10. Все эти алгоритмы основаны на теореме оптимальности из теории динамического программирования. Сейчас мы приведем вариант одного из этих алгоритмов в применении к примеру дидактического характера.

Начиная с события E_1 , которому припишем время наступления 0, рассмотрим для каждой вершины сети дуги, которые в нее входят; для каждой из этих дуг сложим время соответствующей операции, которое приписано дуге, с временем наступления события, соответствующего началу дуги; сравнивая результаты и выбирая из них наибольший, приписываем его рассматриваемой вершине.

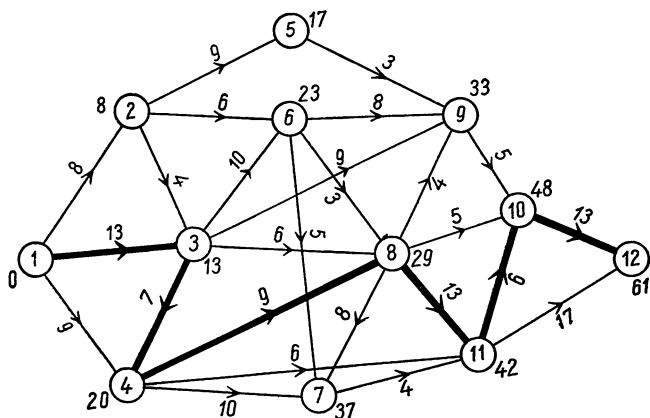
Рассмотрим рис. (8.2). В E_2 входит только одна дуга (1,2). Поскольку для E_1 имеем 0, то для E_2 получим $0+8=8$. В E_3 входят две дуги (2,3) и (1,3); сравнивая $8+4=12$ с $0+13=13$, приписываем E_3 значение 13; это означает, что наступление события E_3 нельзя ожидать раньше 13. В E_4 входят две дуги (3,4) и (1,4); сравнивая $13+7=20$ с $0+9=9$, приписываем E_4 значение 20. E_5 приписываем значение 17. В E_6 входят две дуги (2,6) и (3,6); сравнивая $8+6=14$ с $13+10=23$, приписываем E_6 значение 23. В E_8 входят три дуги (6,8), (3,8) и (4,8); сравнивая $23+3=26$, $13+6=19$ и $20+9=29$, приписываем E_8 значение 29.

¹ Наши рассуждения в этом и следующих параграфах относятся к представлению «события—операции», но они могут быть использованы и для представления «работы—связи», если видоизменить подходящим образом введенные понятия.

² Все-таки предпочтительнее говорить «путь максимальной величины», чем «самый длинный», так как в теории графов длиной пути называют число составляющих его дуг, а длина дуги по определению равна единице.

ние 29. Так продолжаем вплоть до события E_{12} , которому приписываем окончательно значение 61.

Это число представляет собой время выполнения проекта, начинающегося с нулевого момента. Путь, соответствующий этому времени в 61 единицу, легко получить, возвращаясь шаг за шагом обратно из E_{12} в E_1 : это и будет критический путь. На рис. (8.2) он отмечен жирной линией.



Р и с. 8.2.

Если проект (комплекс операций) будет разворачиваться без неожиданных нарушений, его продолжительность должна будет составить 61 неделю и соответствующие события произойдут в моменты, указанные на рис. (8.2).

Операции

$$P_{13}, P_{34}, P_{48}, P_{8,11}, P_{11,10}, P_{10,12}$$

называются «критическими операциями». С них нужно начинать работу после наступления начальных событий соответствующих дуг. Так, к примеру, операция P_{48} должна начаться в первую очередь после реализации события E_4 , т. е. в момент 20. Если критическая операция будет задержана, это вызовет запаздывание выполнения всего проекта. Например, если операция P_{48} начнется только в момент 22, проект будет завершен не раньше, чем к моменту 63.

Таким образом, критические операции представляют собой те операции проекта, на ход выполнения которых руководитель должен направить все свое внимание, так как от их своевременного выполнения зависит общий срок завершения всего проекта (всего комплекса работ).

В параграфе 9 мы увидим, что «некритические операции» допускают некоторое запаздывание в их выполнении.

9. Резервный интервал события. Резервы времени операций

В предыдущем параграфе мы установили времена наступления различных событий, составляющих сеть проекта.

Для каждого некритического события E_i важно знать предельный срок его наступления, т. е. срок, превышение которого приведет к задержке выполнения всего проекта.

Рассмотрим для этого событие E_i . Минимальное время, необходимое для наступления всех событий, расположенных между событиями E_i и E_n , получается определением в сети «самого длинного» пути от E_i до E_n . Эта процедура обеспечивает нам уверенность в возможности действительного выполнения операций, следующих за E_i , с учетом соответствующих им длительностей. Искомый предельный срок t_i^* получается вычитанием этого минимального времени из времени t_n наступления конечного события E_n .

Таким образом, для каждого некритического события мы получаем два граничных срока:

— время t_i : *ожидаемое время* наступления события E_i ,

— время t_i^* : *предельное время* наступления события E_i , превышение которого приведет к изменению общего времени завершения всего комплекса операций.

Для критических событий предельный срок t_i^* совпадает с ожидаемым временем t_i . Эти события не допускают никакого запаздывания в сроках их наступления, или (что означает то же самое) критические операции не допускают никакой задержки в их выполнении.

Интервал $[t_i, t_i^*]$ называется *интервалом свободы события* (резервным интервалом). Это, таким образом, интервал времени, в течение которого может наступить событие E_i без изменения общего времени завершения всех работ².

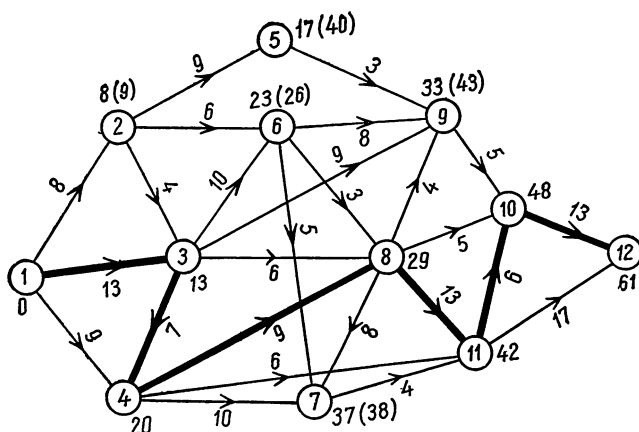
Обратимся опять к примеру постройки дачи и вычислим граничные сроки t_i^* , используя тот же метод, как и при вычислении t_i , но отправляясь на этот раз от конечного события E_{12} .

Рассмотрим сначала, см. рис. (9.1), событие E_7 , отделенное от события E_{11} операцией длительностью 4, так что операция $P_{7,11}$ может начаться за четыре недели до события E_{11} и, следовательно, событие E_7 должно произойти в интервале $[37, 38]$. Событие E_9 отделено от события E_{10} операцией длительностью 5,

¹ Ожидаемое время t_i иногда называют «наиболее ранний срок», а предельное время t_i^* — «наиболее поздний срок».

² Длина интервала свободы события (резервного интервала), т. е. величина $t_i^* - t_i$ называется резервом времени события E_i . — *Прим. перев.*

так что операция $P_{9,10}$ может начаться за пять недель до события E_{10} и поэтому событие E_9 должно произойти в интервале [33, 43]. Событие E_6 отделяет от события E_9 операция в 8 недель, от события E_8 — 3 недели, от события E_7 — 5 недель; из сравнения $43-8=35$, $29-3=26$ и $38-5=33$ видно, что событие E_6 должно произойти не позднее момента 26 (наименьшее из трех), чтобы не вызвать нарушений, которые отразились бы на завершающей дате. Числа, которые при этом получаются, выписаны на рис. (9.1) и заключены в скобки, чтобы не путать их с теми числами, которые были получены при на-



Р и с. 9.1.

хождении критического пути. Событию E_5 припишем (40); событию E_2 после сравнения $40-9=31$, $26-6=20$, $13-4=9$ припишем (9).

Подводя итоги, можно сказать, что моменты наступления событий E_i могут находиться в приведенных ниже интервалах (от—до), причем на критическом пути эти интервалы сводятся к точным датам:

$E_1 : 0$	$E_7 : [37, 38]$
$E_2 : [8, 9]$	$E_8 : 29$
$E_3 : 13$	$E_9 : [33, 43]$
$E_4 : 20$	$E_{10} : 48$
$E_5 : [17, 40]$	$E_{11} : 42$
$E_6 : [23, 26]$	$E_{12} : 61$

Точно так же интересно знать для каждой операции P_{ij} , какая задержка может быть допущена при ее выполнении без того,

чтобы это привело к нарушению срока наступления события E_j . Эта возможная отсрочка начала выполнения операции P_{ij} есть «свободный резерв времени» операции P_{ij} , обозначаемый в дальнейшем через M_{ij} .

Если t_i и t_j — ожидаемые сроки наступлений событий E_i и E_j , между которыми имеется операция P_{ij} длительностью t_{ij} , то ее свободный резерв времени равен

$$M_{ij} = t_j - t_i - t_{ij}. \quad (9.1)$$

Свободный резерв времени критических операций равен нулю, так как в отношении этих операций не может быть допущена никакая отсрочка в начале их выполнения.

Таким же образом определяются для каждой операции «полный резерв времени» и «независимый резерв времени».

По определению полный резерв времени операции P_{ij} равен

$$t_j^* - t_i - t_{ij}, \quad (9.2)$$

а ее независимый резерв времени равен

$$t_j - t_i^* - t_{ij}^1. \quad (9.3)$$

Резервы событий и операций характеризуют эластичность проекта. Чем более они уменьшаются, тем жестче сеть проекта. Сеть проекта «полной жесткости» такова, что все ее пути являются критическими. В ней нет ни резервов событий, ни свободных резервов операций. При таком положении недопустимы никакие задержки ни по какой из операций.

Существенное различие между резервом события E_i и свободным или полным резервом операции P_{ij} состоит в том, что резерв события представляет собой запаздывание, которое может быть допущено в наступлении события E_i без изменения фиксированных сроков наступления критических событий, и в частности конечного события, соответствующего выполнению проекта, в то время как свободный резерв операции M_{ij} представляет собой отсрочку начала выполнения операции P_{ij} , без изменения ожидаемого срока наступления события E_j , а полный резерв представляет собой максимальную допустимую отсрочку начала выполнения этой операции.

Другой аспект понятия свободный резерв может быть выявлен в случае, когда продолжительность некритических операций может быть удлинена. В этом случае свободный резерв M_{ij} соответствует возможному удлинению длительности операции

¹ При таком определении независимый резерв может быть отрицательным. В литературе по методам СПУ в качестве определения независимого резерва часто используют величину $\max(0, t_j - t_i^* - t_{ij})$, принимающую лишь неотрицательные значения. — Прим. ред.

P_{ij} , оставляющему неизменными сроки t_i и t_j наступления событий E_i и E_j , определяющих эту операцию.

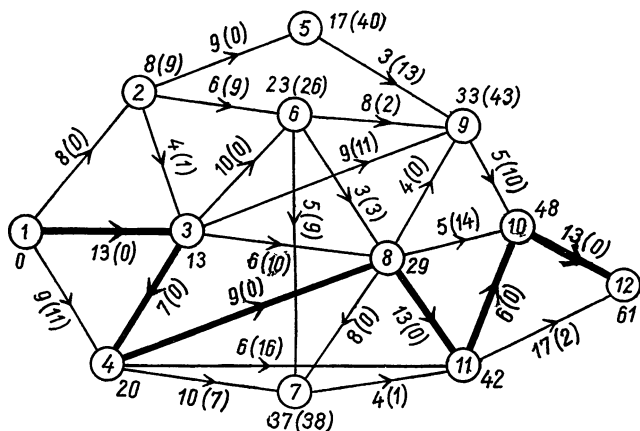
Эта разница между резервом события и свободным резервом или полным резервом операции лучше всего видна в сети, изображенной на рис. (9.1) и воспроизведенной на рис. (9.2).

Здесь интервал свободы события E_6 есть [23, 26]. Свободный резерв операции P_{69} равен

$$M_{69} = 33 - 23 - 8 = 2.$$

Следовательно, операция P_{69} может начаться в момент $23 + 2 = 25$ без изменения времени t_9 — срока наступления события E_9 , который остается равным 33.

Свободные резервы операций указаны на рис. (9.2) в скобках.



Р и с. 9.2.

Полный резерв операции P_{69} равен $43 - 23 - 8 = 12$. Таким образом, операция P_{69} может начаться в момент $23 + 12 = 35$, не вызывая задержку выполнения всего комплекса работ.

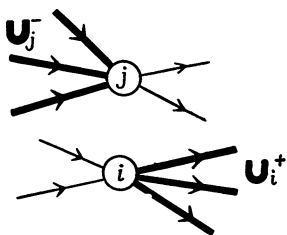
Важное значение понятий граничных сроков событий и свободных резервов операций особенно дает себя знать в процессе выполнения проекта. Если все события наступают в пределах граничных сроков t_i^* , то проект осуществляется нормально и конечный срок t_n будет выдержан. Если, напротив, по каким-либо причинам случится, что момент наступления некоторого события превысит предельный срок t_i^* , то руководители проекта должны произвести, если это возможно, перераспределение сил, чтобы ускорить работы в этой части выполнения проекта. Если такой возможности нет, то можно утверждать, что срок выполнения всего комплекса операций будет задержан, и эту задержку можно вычислить.

Граничные сроки событий представляют собой, таким образом, «пределы безопасности» и являются для руководителя «сигналом тревоги», предупреждающим о срыве срока выполнения проекта.

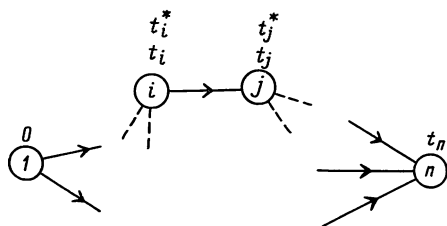
В некоторых исследованиях в качестве критерия приоритета используется свободный резерв¹, но обычно, когда речь идет о том, как приступить к делу и проверить способы организации работ, в качестве критерия приоритета выбирается полный резерв; этот критерий принимается в расчет чаще всего.

10. Нахождение критического пути. Используемые алгоритмы

При первом чтении этот параграф может быть опущен. В нем дается изложение в математической форме идей, рассмотренных в предыдущих параграфах².



Р и с. 10.1.



Р и с. 10.2.

Математическая формулировка метода, изложенного в параграфе 8, сводится к следующему.

Пусть U — множество дуг, образующих сеть проекта, t_{ij} — длительность операции P_{ij} , t_i и t_i^* — ожидаемый и предельный сроки наступления события E_i . Тогда

$$t_1 = 0, \quad (10.1)$$

$$t_j = \max_{(i,j) \in U_j^-} (t_i + t_{ij}), \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (10.2)$$

где (i, j) — дуга, идущая из вершины i в вершину j , а U_j^- — множество дуг, входящих в вершину j .

¹ Критерии приоритета по полным или свободным резервам операций применяются для построения различных алгоритмов приближенного решения задачи оптимального распределения ресурсов в системах СПУ. Использование смешанных приоритетов позволяет несколько улучшить решения. — Прим. ред.

² Читатель, не привыкший к обращению с математическими формулами, может перейти непосредственно к практическим алгоритмам, данным в конце этого параграфа.

МАХ означает, что мы берем максимум по всем дугам, принадлежащим U_j^- .

Таким же образом

$$t_i^* = \text{MIN}_{(ij) \in U_i^+} (t_j^* - t_{ij}), \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (10.3)$$

$$t_n^* = t_n \text{ — срок завершения всего проекта,} \quad (10.4)$$

$$t_1^* = t_1 = 0 \text{ — момент начала работ.} \quad (10.5)$$

Резервы событий и операций получают из (10.2) и (10.3) и определяются следующими соотношениями:

$$\text{резерв времени события } E_i: t_i^* - t_i, \quad (10.6)$$

$$\text{полный резерв времени операции } P_{ij}: t_j^* - t_i - t_{ij}, \quad (10.7)$$

$$\text{свободный резерв времени операции } P_{ij}: t_j - t_i - t_{ij}, \quad (10.8)$$

$$\text{независимый резерв времени операции } P_{ij}: t_j - t_i^* - t_{ij}. \quad (10.9)$$

Резервы событий и операций могут быть исчислены и другим методом:

$$t_1 = 0, \quad (10.10)$$

$$t_j = \text{MAX}_{\mu \in \mu_j} \left[\sum_{(ij) \in \mu} t_{ij} \right], \quad j = 2, \dots, n, \quad (10.11)$$

где μ_j означает множество путей, соединяющих 1 с j ,

$$t_n^* = t_n, \quad (10.12)$$

$$t_j^* = t_n - \text{MAX}_{v \in v_j} \left[\sum_{(ij) \in v} t_{ij} \right], \quad j = 2, \dots, n-1 \quad (10.13)$$

и v_j означает множество путей, соединяющих j с n .

$$t_1^* = t_1 = 0. \quad (10.14)$$

Затем по формулам (10.6)–(10.9) определяют резервы времени событий и операций.

Для нахождения критического пути и даты t_n завершения проекта могут быть использованы также алгоритмы Форда (Ford) и Беллмана—Калаба (Bellman—Kalaba).

Ниже приводится описание этих двух алгоритмов.

Алгоритм Форда, [1] и [3]

1⁰) Отметить каждую вершину E_i индексом t_i ; вначале положить $t_1 = 0$ и $t_i = 0$ для всех i , если $i \neq 1$.

2⁰) Найти такую дугу (i, j) , что $t_j - t_i < t_{ij}$, и заменить t_j на

$$t_j' = t_i + t_{ij} > t_j.$$

Заметим, что $t'_j > 0$, если $j \neq 1$. Продолжать так до тех пор, пока не останется дуг, приводящих к увеличению t_i .

3⁰) Существует вершина E_{p_1} , такая, что

$$t_n - t_{p_1} = t_{p_1 n},$$

так как t_n монотонно возрастает в течение процедуры (2⁰) и вершина E_{p_1} является последней вершиной, использованной для увеличения t_n .

Точно так же пусть вершина E_{p_2} такова, что

$$t_{p_1} - t_{p_2} = t_{p_1 p_2} \dots \text{ и т. д.}$$

Так как последовательность $t_n, t_{p_1}, t_{p_2}, \dots$ является строго убывающей, то в некоторый момент получим, что $E_{p_{k+1}} = E_1$. Тогда t_n будет величиной самого длинного пути из E_1 в E_n (дата реализации проекта) и

$$\mu = [E_1, E_{p_k}, E_{p_{k-1}}, \dots, E_{p_1}, E_n]$$

будет критическим путем.

Алгоритм Беллмана—Калаба, [3]

Этот алгоритм представляет собой видоизменение предыдущего на основе идеи динамического программирования. Метод основан на следующем очевидном свойстве: «всякий максимальный путь, содержащий не более r дуг, образован частичными путями, содержащими не более k ($k \leq r$) дуг, которые также максимальны»¹.

Для всякой дуги $(i, j) \notin U$ положим $t_{ij} = -\infty$; с другой стороны, для всякого i положим $t_{ii} = 0$. Задача состоит в нахождении пути

$$\mu = [E_1, E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}, E_n], \quad (10.15)$$

такого, что

$$t_{1i_1} + t_{i_1 i_2} + t_{i_2 i_3} + \dots + t_{i_k n} \quad (10.16)$$

достигает максимума.

Для этого достаточно решить следующую систему уравнений

$$v_i = \max_j (t_{ij} + v_j), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (10.17)$$

$$v_n = 0, \quad (10.18)$$

где v_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) представляет величину оптимального

¹ Это свойство остается справедливым, если рассматривать минимальные пути и минимальные частичные пути.

пути от вершины i до конечной вершины. Все n вершин предполагаются пронумерованными от 1 до n (начальная вершина — 1, конечная — n).

Исчисление производится следующим образом: сначала полагают.

$$v_i^{(1)} = t_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (10.19)$$

$$v_n^{(1)} = 0. \quad (10.20)$$

Затем вычисляют

$$v_i^{(2)} = \underset{j}{\text{MAX}} (t_{ij} + v_j^{(1)}), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n-1, \\ j = 1, 2, \dots, n, \end{matrix} \quad (10.21)$$

$$v_n^{(2)} = 0. \quad (10.22)$$

Затем последовательно вычисляются

$$v_i^{(k)} = \underset{j}{\text{MAX}} [t_{ij} + v_j^{(k-1)}], \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n-1, \\ j = 1, 2, \dots, n, \end{matrix} \quad (10.23)$$

$$v_n^{(k)} = 0 \quad (10.24)$$

для всех значений $k=1, 2, \dots$; исчисление заканчивается, когда

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.25)$$

Тогда v_i^k будет величиной оптимального пути между вершинами E_1 и E_n . Легко доказывается, что если сеть имеет n вершин, то достаточно $(n-2)$ итераций для достижения оптимума.

Важно подчеркнуть, что алгоритм Беллмана—Калаба, предложенный первоначально для нахождения минимального пути, применяется здесь для нахождения максимального пути, так как сеть проекта не содержит ни контуров, ни петель; в противном случае длина пути (число составляющих дуг) могла бы не быть конечной, а его величина была бы неограниченной.

Пример применения алгоритма Беллмана—Калаба

Рассмотрим сеть, изображенную на рис. (10.3), где числа, приписанные дугам,— это длительности операций.

Для вычисления величин $v_i^{(k)}$ оптимальных путей из вершины E_1 в вершину E_{12} обратимся к таблице 10.1, представляющей собою матрицу, соответствующую данной сети, затем вычислим

Таблица 10.1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	3	4	11	—∞	8	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞
2	—∞	0	—∞	7	9	—∞	7	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞
3	—∞	—∞	0	9	—∞	2	4	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞
4	—∞	—∞	—∞	0	2	—∞	—∞	3	3	—∞	—∞	—∞
5	—∞	—∞	—∞	—∞	0	—∞	—∞	5	—∞	—∞	—∞	—∞
6	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	0	5	—∞	8	9	—∞	—∞
7	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	0	4	—∞	8	5	—∞
8	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	0	—∞	—∞	11	—∞
9	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	0	4	—∞	5
10	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	0	4	3
11	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	0	2
12	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	0

$v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(k)}$ по формулам (10.19)—(10.25). Получим таблицу (10.2).

Приведем часть вычислений полностью: покажем, например, как получена величина $v_6^{(3)} = 16$.

$$\begin{aligned}
 v_6^{(3)} &= \max_j [t_{6j} + v_j^{(2)}] \\
 &= \max [t_{61} + v_1^{(2)}, t_{62} + v_2^{(2)}, t_{63} + v_3^{(2)}, t_{64} + v_4^{(2)}, t_{65} + v_5^{(2)}, t_{66} + v_6^{(2)}, \\
 &\quad t_{67} + v_7^{(2)}, t_{68} + v_8^{(2)}, t_{69} + v_9^{(2)}, t_{6,10} + v_{10}^{(2)}, t_{6,11} + v_{11}^{(2)}, t_{6,12} + v_{12}^{(2)}] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max [(-\infty) + (-\infty), (-\infty) + (-\infty), (-\infty) + (-\infty), \\
&\quad (-\infty) + 8, (-\infty) + (-\infty), 0 + 13, 5 + 11, (-\infty) + 13, \\
&\quad 8 + 7, 9 + 6, (-\infty) + 2, (-\infty) + 0] \\
&= 16.
\end{aligned}$$

Алгоритм Беллмана—Калаба отыскивает пути, идущие из вершины E_i в вершину E_n , начиная с пути длины 1, затем пути длиной не больше 2, затем — не больше 3 и т. д. с последовательно возрастающими значениями максимума.

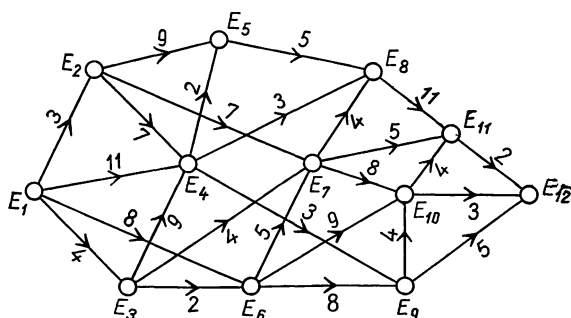


Рис. 10.3

Таблица 10.2

$v_i^{(k)}$	$k \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	5	3	(2)	0
2	2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	8	$-\infty$	13	11	(13)	7	(6)	2	0
3	3	21	18	17	16	(18)	16	(17)	13	(10)	6	2	0
4	4	27	(27)	25	(20)	18	(22)	17	13	10	6	2	0
5	5	31	27	(29)	20	18	22	17	13	10	6	2	0
6	6	(33)	27	29	20	18	22	17	13	10	6	2	0
7	7	33	27	29	20	18	22	17	13	10	6	2	0

Результаты таблицы 10.2 показаны на рис. (10.4) жирной линией.

Числа в кружках на рис. (10.4) указывают величины максимальных путей, идущих из каждой вершины E_i к конечной вершине E_n .

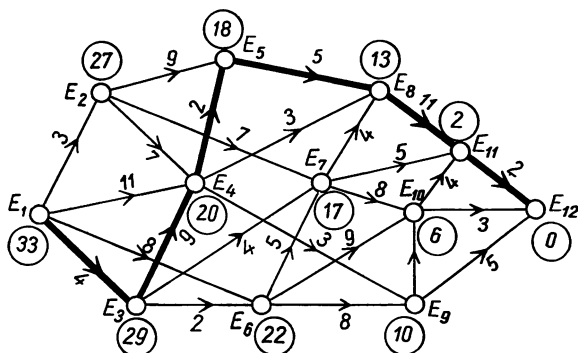


Рис. 10.4.

Практический алгоритм для случая сети без контура

В начале настоящего параграфа мы дали представление об общем методе, применимом в случае сети без контура. Этот метод может быть изложен иначе с помощью следующего алгоритма, где предлагаются другие, более простые обозначения.

1⁰. Определим слои сети методом, изложенным в параграфе 4.

2⁰. Пусть x_1 — переменная, представляющая элемент слоя (1), x_2 — переменная, представляющая элемент слоя (2), ..., x_n — переменная, представляющая элемент слоя (n), Пусть x_0 — элемент слоя (0) и x_N — элемент слоя (N), если сеть содержит $N+1$ слоев, определенных исходя из начала x_0 .

Вычислим последовательно

$$\begin{aligned}
 v_1^*(x_1) &= \max v_{01}(x_0, x_1) = v_{01}(x_0, x_1), \\
 v_2^*(x_2) &= \max \{ \underset{x_1}{\text{MAX}} [v_1^*(x_1) + v_{12}(x_1, x_2)], v_{02}(x_0, x_2) \}, \\
 v_3^*(x_3) &= \max \{ \underset{x_2}{\text{MAX}} [v_2^*(x_2) + v_{23}(x_2, x_3)], \\
 &\quad \underset{x_1}{\text{MAX}} [v_1^*(x_1) + v_{13}(x_1, x_3)], v_{03}(x_0, x_3) \}, \\
 v_4^*(x_4) &= \max \{ \underset{x_3}{\text{MAX}} [v_3^*(x_3) + v_{34}(x_3, x_4)], \\
 &\quad \underset{x_2}{\text{MAX}} [v_2^*(x_2) + v_{24}(x_2, x_4)], \\
 &\quad \underset{x_1}{\text{MAX}} [v_1^*(x_1) + v_{14}(x_1, x_4)], v_{04}(x_0, x_4) \}, \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

где $v_{ij}(x_i, x_j)$ — величина, приписанная дуге (x_i, x_j) . Полагаем

$$v_{ij}(x_i, x_j) = 0, \text{ если } (x_i, x_j) \notin U^1, \quad (10.27)$$

т. е. если нет дуги от x_i к x_j .

Заменяя ² MAX на MIN и тах на min и полагая

$$v_{ij}(x_i, x_j) = \infty, \text{ если } (x_i, x_j) \notin U, \quad (10.28)$$

используют тот же алгоритм для нахождения минимума в сети без контура.

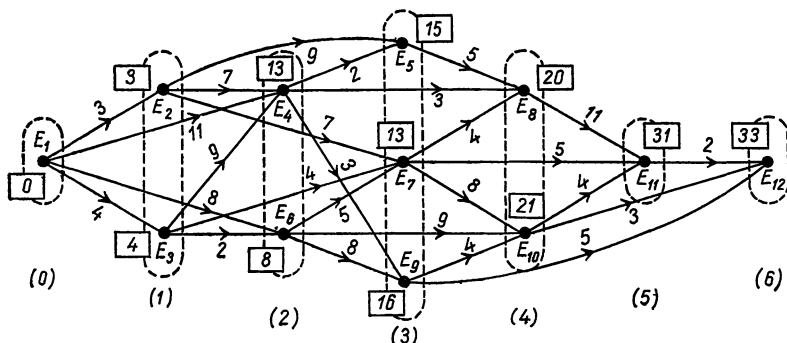


Рис. 10.5.

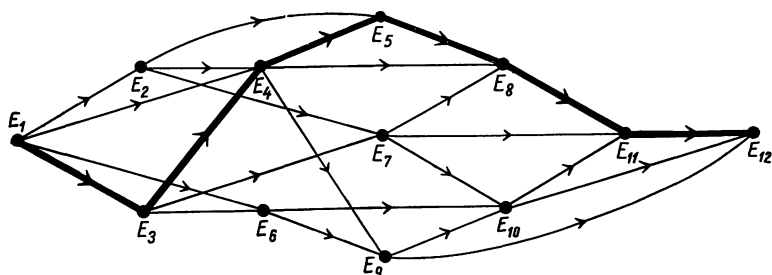


Рис. 10.6.

Пример, изображенный на рис. (10.3), воспроизведен на рис. (10.5) с выделением слоев. Величины $v_i(x_i)$ вписаны

¹ Если при программировании на электронно-вычислительных машинах перенумеровать все пары (x_i, x_j) для того, чтобы пользоваться формулами (10.26), то в этом случае следует взять $v_{ij}(x_i, x_j) = -\infty$ (достаточно большое отрицательное число), если $(x_i, x_j) \notin U$. Однако, используя разбиение на слои (то, что математики называют «порядковой функцией графа»), можно избежать необходимости в такой сплошной перенумерации.

² Мы обычно пишем MAX, когда требуется найти максимум некоторой переменной, и тах, когда требуется выбрать максимальное значение из множества численно данных величин. То же относится к MIN и min.

внутри маленьких прямоугольников. Нетрудно убедиться в том, с какой легкостью эти вычисления могут быть проведены непосредственно на чертеже.

11. Два примера практического применения

Первый пример, заимствованный у Пако¹

В предыдущих параграфах мы показали, как строится сеть проекта (комплекса операций), исходя из отношений порядка, существующих между различными операциями, после чего метод критического пути дает возможность определить на основе этого время завершения всего комплекса операций, а также резервы событий и операций.

Сам по себе метод критического пути не является методом упорядочения². Он применим только тогда, когда сеть проекта уже составлена, т. е. когда операции уже упорядочены. Его роль состоит фактически в том, чтобы расшифровать сеть с временной точки зрения, т. е. дать все необходимые указания относительно сроков, в которые должны наступить различные события проекта.

Совершенно очевидно, что наиболее важным длительным и сложным делом является составление сети проекта, т. е. та часть исследования, при выполнении которой приходится обращаться к исследованию упорядочения. В самом деле, порядковые отношения операций не всегда являются достаточно строгими или вполне определенными; некоторые операции могут быть начаты прежде, чем закончится какая-нибудь предыдущая (составные операции). На практике существует много различных способов разработки проектов (комплексов операций) и их сетей.

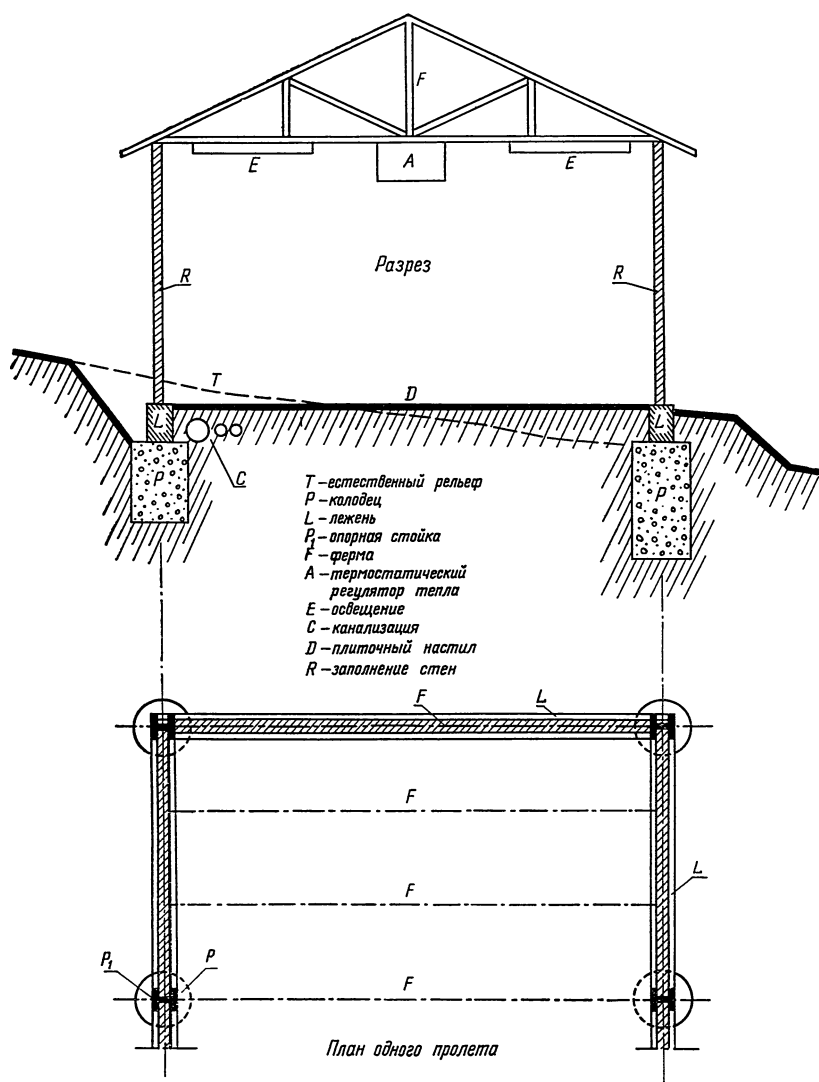
Мы проиллюстрируем эти методы упорядочения на примере и покажем, как метод критического пути позволяет сопоставлять различные сети проектов, относящиеся к одному и тому же комплексу операций. Этот пример относится к строительству промышленного здания, состоящего из пяти пролетов.

Ниже приведена таблица различных операций. Пунктирные стрелки указывают порядковые отношения операций. Проект начинается с операций А, В и Е.

Исходя из этого мы можем начертить сеть проекта, см. рис. (11.2).

¹ Семинар по исследованию операций (SOFRO), Пако (М. Pasaud), генеральный директор А—PRO—ВА, «Пример применения теории графов для упорядочения работ на одном из строительства». Мы очень высоко оцениваем исследование Пако.

² В том смысле, который часто придается этому термину руководителями и специалистами по исследованию операций. В настоящем параграфе термин «упорядочение» будет употребляться именно в этом смысле.



Р и с. 11.1.

Таблица 11.1

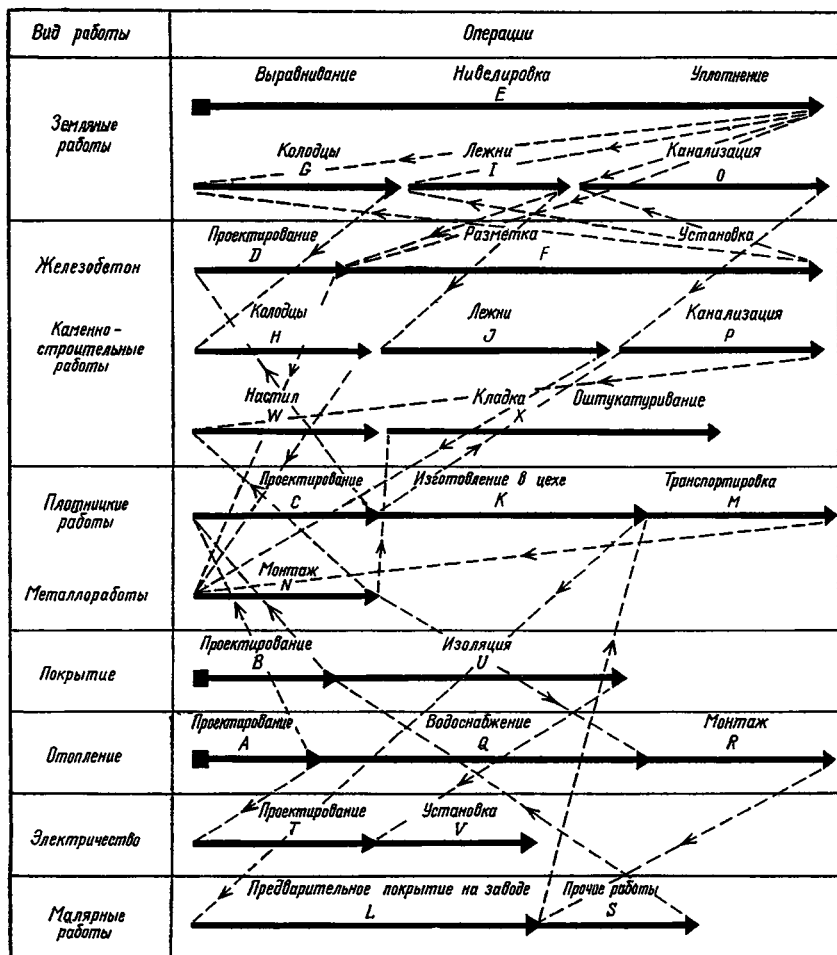


Таблица 11.2

Длительности операций (в днях)

A — 10	K — 60	U — 20
B — 3	L — 20	V — 20
C — 15	M — 5	W — 35
D — 10	N — 25	X — 55
E — 15	O — 5	
F — 5	P — 20	
G — 30	Q — 43	
H — 20	R — 35	
I — 4	S — 40	
J — 18	T — 2	

При этом потребовалось ввести две дополнительные фиктивные операции, показанные на рисунке пунктирной линией. Числа, проставленные в вершинах сети, представляют собой ожидаемые сроки наступления соответствующих событий. Конечной вершине приписан срок 250. Следовательно, проект должен быть закончен в течение 250 дней. Критический путь показан жирной линией.

Но некоторые операции могут быть разложены или, иначе говоря, некоторые операции можно было бы начинать до полного окончания предшествующих им операций. Это может иметь

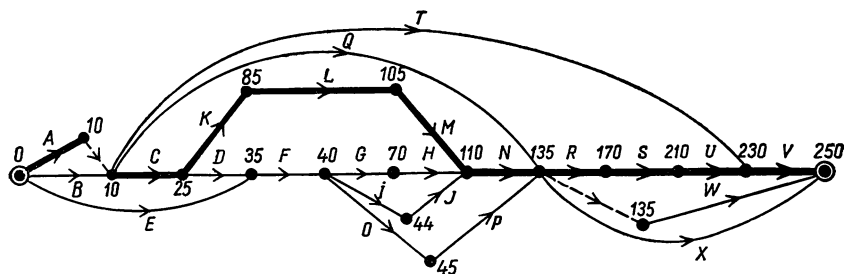


Рис. 11.2.

место в том случае, если сооружение здания будет производиться пролет за пролетом. При этом могут быть составлены различные сети, каждая из которых будет соответствовать определенной организации строительства.

1°. Сеть, соответствующая организации строительства с приоритетом первого пролета

Детализированные операции — A, C, K, L, M, N, R, S, U, V. Обозначения операций и их длительности указаны в таблице 11.3. Теперь можно вычертить сеть проекта и вычислить ожидаемые сроки наступления различных событий, см. рис. (11.3).

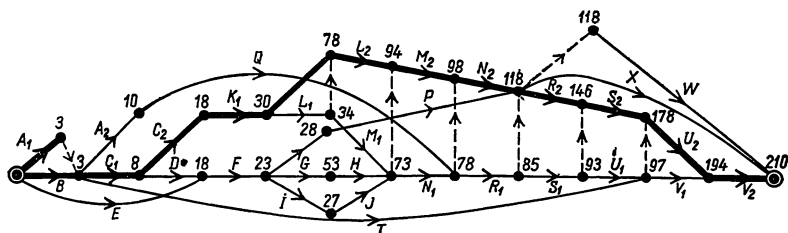


Рис. 11.3.

Видно, что теперь дата наступления конечного события — 210. Таким образом, разбив некоторые операции, мы выиграли 40 дней.

Как и раньше, пунктирными линиями показаны дополнительные фиктивные операции, необходимость в ведении которых была разъяснена в параграфе 7.

Таблица 11.3

Обозначение операций		Длительность операций
A_1	Изучение воздушно-теплового режима, план размещения трубопроводов	3
A_2	План отопительной системы	7
B	Проект перекрытий	3
C_1	Расчет нагрузки на деревянные конструкции	5
C_2	План выполнения плотницких работ	10
D	План железобетонных работ	10
E	Земляные работы	15
F	Выбор и разметка строительной площадки	5
G	Рытье колодцев	30
H	Бетонирование колодцев	20
I	Рытье лежней	4
J	Бетонирование лежней	18
K_1	Изготовление деревянных конструкций 1-го пролета	12
K_2	Изготовление деревянных конструкций остальных 4 пролетов	48
L_1	Грунтовка 1-го пролета	4
L_2	Грунтовка остальных 4 пролетов	16
M_1	Доставка 1-го пролета	1
M_2	Доставка 4 других пролетов	4
N_1	Подъем и установка 1-го пролета	5
N_2	Подъем и установка 4 других пролетов	20
O	Рытье канализационной траншеи	5
P	Установка канализации	20
Q	Подвод отопительного трубопровода	45
R_1	Установка отопления 1-го пролета	7
R_2	Установка отопления остальных 4 пролетов	28
S_1	Покраска 1-го пролета	8
S_2	Покраска остальных 4 пролетов	32
T	План электропроводки	2
U_1	Изоляционное покрытие 1-го пролета	4
U_2	Изоляционное покрытие остальных 4 пролетов	16
V_1	Установка электрооборудования 1-го пролета	4
V_2	Установка электрооборудования остальных 4 пролетов . . .	16
W	Настил пола	35
X	Заполнение стен	55

2°. Сеть, соответствующая строительству с приоритетом двух пролетов

Новые длительности операций характеризуются следующими данными:

Таблица 11.4

$K_1 - 24$	$N_1 - 10$	$U_1 - 8$
$K_2 - 36$	$N_2 - 15$	$U_2 - 12$
$L_1 - 8$	$R_1 - 14$	$V_1 - 8$
$L_2 - 12$	$R_2 - 21$	$V_2 - 12$
$M_1 - 2$	$S_1 - 16$	
$M_2 - 3$	$S_2 - 24$	

Длительности других операций остаются прежними.

В результате получаем сеть, приведенную на рис. (11.4). Дата наступления конечного события — 177. Таким образом мы добились нового сокращения продолжительности всего проекта.

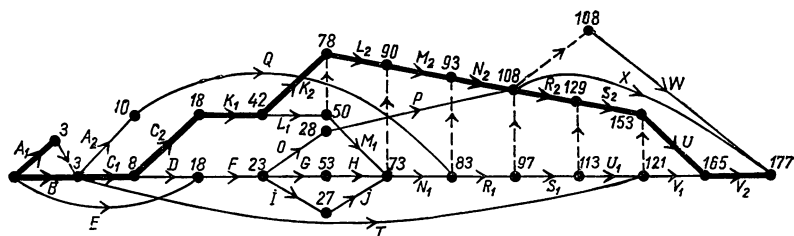


Рис. 11.4.

3°. Сеть, соответствующая строительству с приоритетом трех пролетов

Новые длительности операций характеризуются следующими данными:

Таблица 11.5

$K_1 - 36$	$N_1 - 15$	$U_1 - 12$
$K_2 - 24$	$N_2 - 10$	$U_2 - 8$
$L_1 - 12$	$R_1 - 21$	$V_1 - 12$
$L_2 - 8$	$R_2 - 14$	$V_2 - 8$
$M_1 - 3$	$S_1 - 24$	
$M_2 - 2$	$S_2 - 16$	

Длительности других операций остаются прежними. В результате получаем сеть, приведенную на рис. (11.5). Дата наступления конечного события — 165.

Критические операции отмечены жирными линиями.

Мы представили три сети, соответствующие трем возможным планам организации строительства; могут быть, конечно, разработаны и другие планы.

Этот пример интересен тем, что он дает представление о том, что принято называть проблемами упорядочения, и показывает, как метод критического пути позволяет сделать выбор

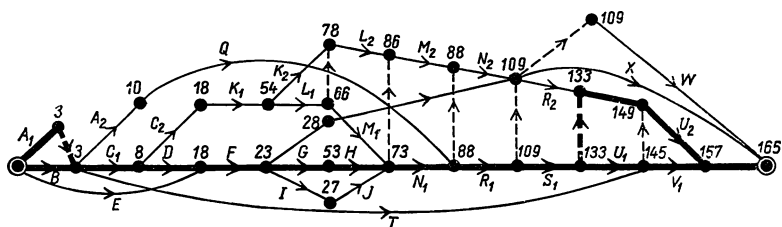


Рис. 11.5.

между различными планами для одного и того же проекта. В нашем примере мы выберем план № 3, так как он дает общий срок строительства в 165 дней.

Второй пример

Этот пример, любезно сообщенный нам Б. Руа, заимствован из исследования, произведенного Ж. Розенским. Он иллюстрирует преимущества метода потенциалов в задачах упорядочения, а также его гибкость.

Поставленная проблема состоит в организации ежедневного цикла работ по строительству секции жилого дома с использованием агрегата для скользящей опалубки.

Уточним прежде всего, что операции, при выполнении которых используется грузоподъемный кран, требуют в целом около 10 часов в смену и что наряду с ними необходимо включить еще некоторые ручные операции (в среднем по 9 часов работы на человека); понятно, что выполнение плана менее чем за 12 час. является при этих условиях весьма сложным делом.

На рис. (11.6) представлена сеть, соответствующая этой задаче. Данные (длительности, длины дуг) относятся к минимальным темпам работы (знак + указывает длительности и дуги, которые можно сократить). Двойными рамками обозначены работы, связанные с использованием грузоподъемного крана. Отметим также существование особых ограничений на работы 104 и 106, означающих, что их выполнение связано между собой (106 должна начаться через 25 мин. после 104 — ни раньше, ни позднее); это одна из возможностей, предоставляемых применением «метода потенциалов». В целях экономии места мы воздерживаемся здесь от подробного описания операций.

Исходя из этих данных, можно было бы применить к сети,

изображенной на рис. (11.6), один из алгоритмов, приведенных в параграфе 10, и получить таким образом сроки t_i начала исходных работ, образующих эту сеть.

Однако здесь немедленно обнаружили бы противоречия. Например, работы 23 и 51, с одной стороны, и работы 6, 9 и 10 — с другой (а также многие другие), одновременно требуют использования грузоподъемного крана, что невозможно.

Регламент типа «первым пришел — первым обслужен» позволяет устранить эти противоречия и часто дает решение, близкое к оптимуму. При этом поступают следующим образом:

— вычисления производятся при помощи выбранного алгоритма, но начальные сроки t_i располагаются в порядке возрастания;

— если две работы i и j должны быть разъединены во времени ($t_j \geq t_i$), то эта разница учитывается введением дополнительной потенциальной связи

$$t_j - t_i \geq d_i,$$

где d_i — длительность работы i , пока не начнет выполняться работа j .

Этот процесс можно проследить на сети, изображенной на рис. (11.7), которая дает первое решение: пусть работа 51 следует за работой 23 (так как t_{51} и t_{23} совпадали, то направление дополнительной дуги могло быть выбрано произвольно: в данном случае выбор определился порядковым номером работы) и предшествует работе 2 и т. д. ...

Вычисление предельных или «наиболее поздних» сроков t_i^* проводится после предыдущей процедуры на сети, снабженной дополнительными дугами, обозначенными на рисунке пунктиром. При этом учет смещений начала работ во времени не требуется благодаря введенным дополнительным дугам. Все сроки t_i^* не указаны на рисунке, чтобы не перегружать его.

Это первое решение дает уже общую продолжительность меньше 12 час. (684 мин.).

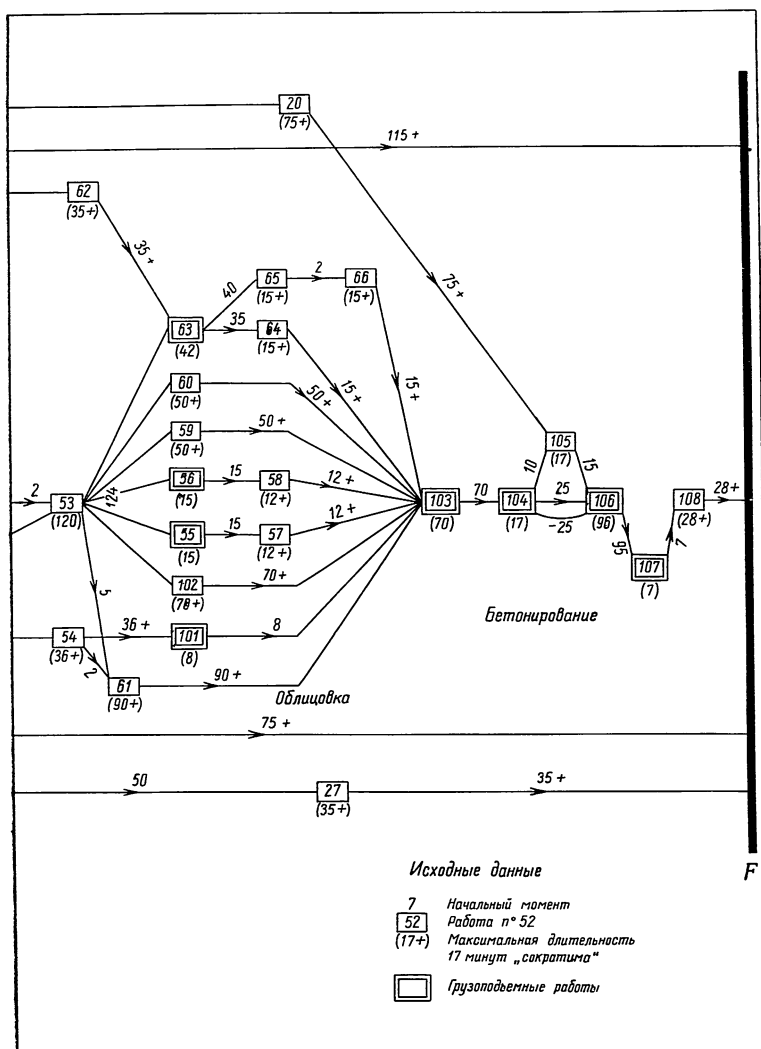
Переход от одного решения к другому, лучшему, производится в результате систематического пересмотра и исследования

— гипотез о темпах работы,

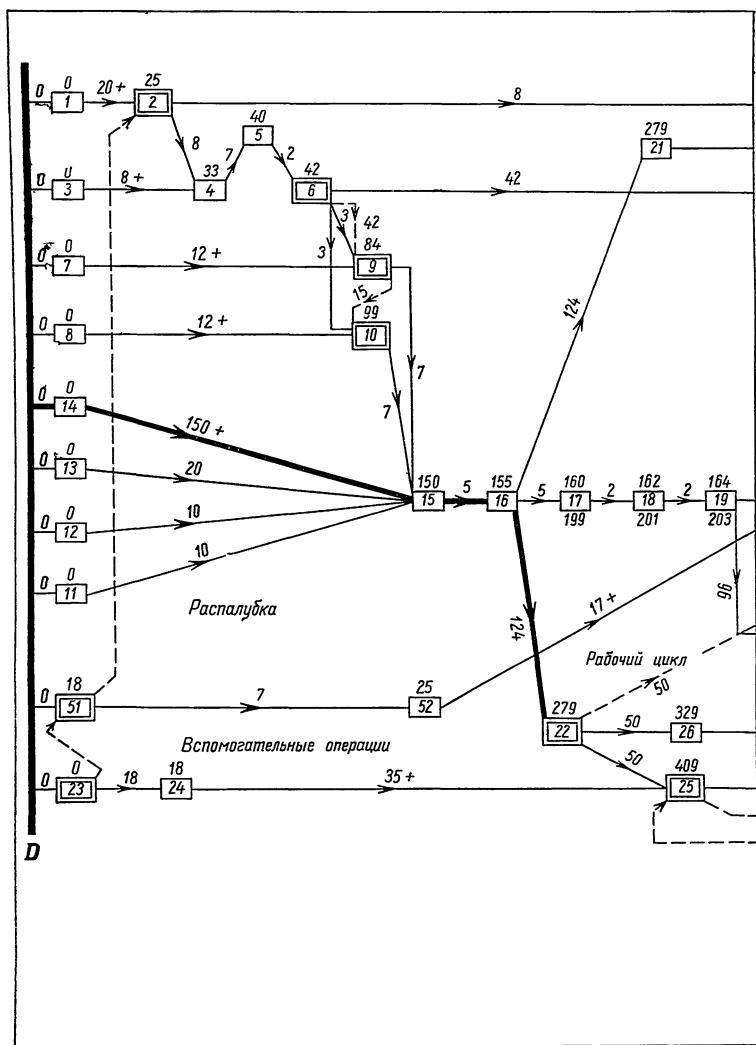
— последовательности дополнительных связей.

Для сокращения общего срока необходимо ускорить выполнение работ критического пути.

Дополнительные потенциальные ограничения устанавливаются произвольно, и всегда может случиться, что будет намечен порядок, обратный наиболее выгодному. А priori это приводит к перебору очень большого числа комбинаций; необходим хороший способ систематизации, при этом задача заключается в си-



Р и с. 11.6 (продолжение).



Р и с. 11.7.

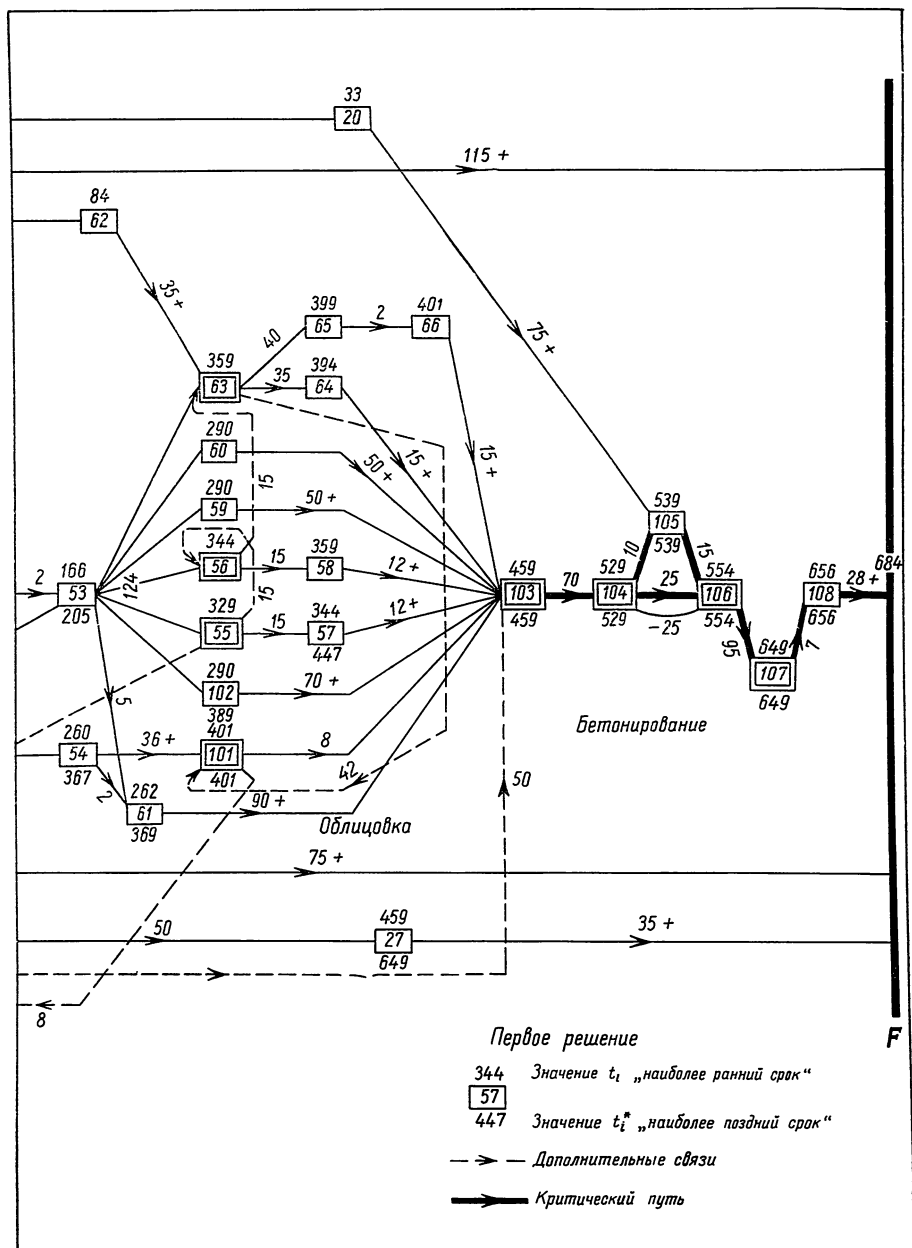


Рис. 11.7 (продолжение).

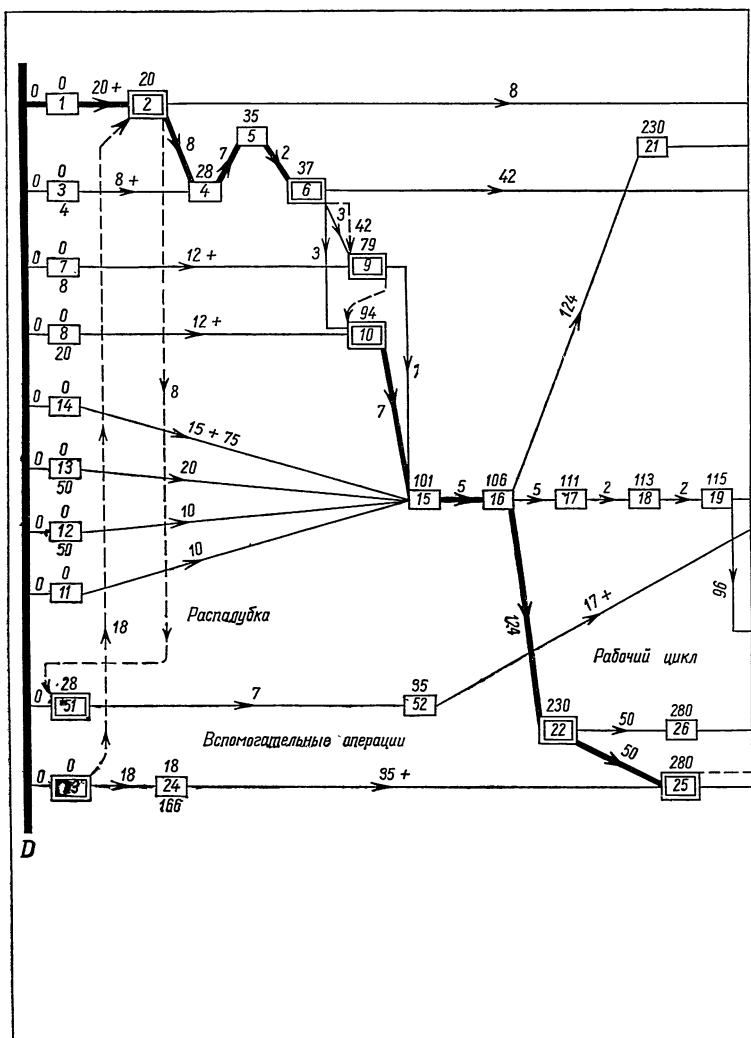


Рис. 11.8.

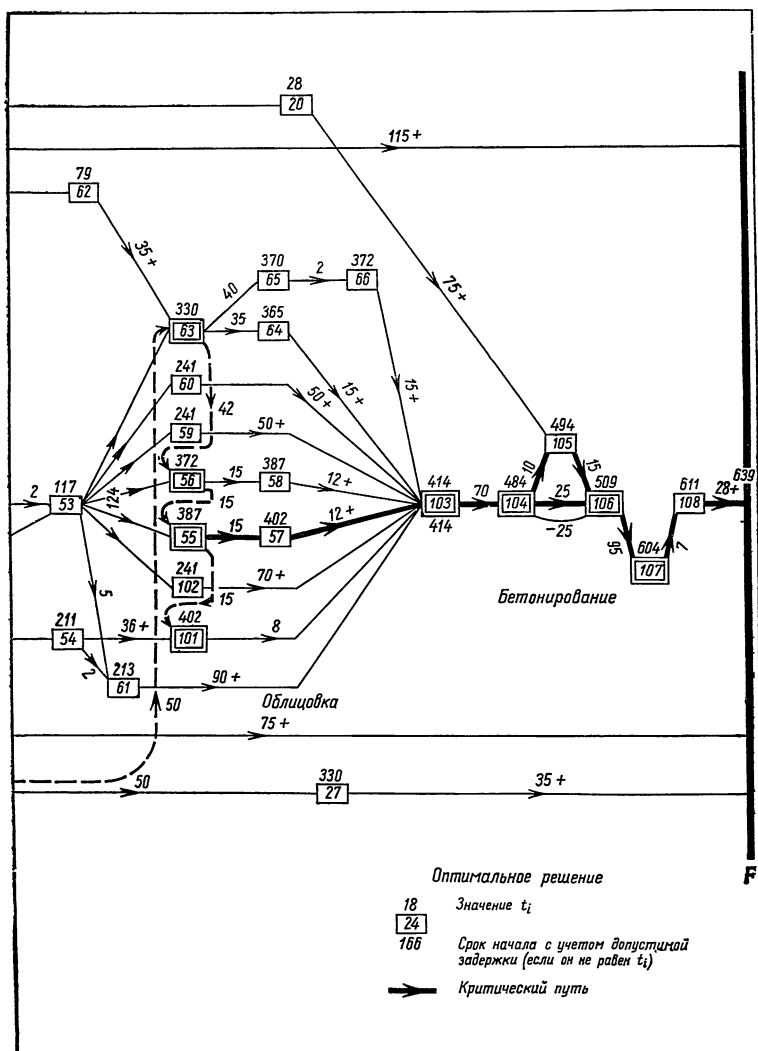


Рис. 11.8 (продолжение).

стематическом устранении наиболее неудачных решений. Для этого может быть использован следующий прием:

- проходя по дугам критического пути, отправляясь от начала, обращаем первую встретившуюся дополнительную дугу,
- повторяем вычисления для этой новой сети, не меняя направления других дополнительных дуг.

Эта процедура оправдывается следующим:

- обращение дуги, не лежащей на критическом пути, не может его уменьшить, так как эта дуга в него не входит. Обращение дуги может только увеличить критический путь, если эта дуга станет критической,

- обращение дуги, устраняя задержки, вызываемые несоответствиями в сроках начала работ, может привести к сокращению плана; с другой стороны, это может привести к появлению бесполезных дополнительных дуг или таких, которые могли бы помешать улучшению плана. Но в последнем случае рассматриваемые дуги становятся критическими и будут пересмотрены на последующих стадиях.

Такой метод не исключает ни одного хорошего решения, но и не на каждой итерации улучшает план. Однако он позволяет выиграть время и дал хорошие результаты в рассматриваемом случае.

В первом решении работа 14 (длительная, но не имеющая большого значения) задерживала выполнение всей совокупности операций. Между тем достаточно было удвоить численность работников, занятых выполнением этой работы, для того чтобы выиграть 44 мин. Но во втором решении дополнительные дуги, связывающие работы 23, 51 и 2, становятся критическими; обращение дуги 51→2 дает решение № 3.

Практически это решение самое короткое: дополнительные дуги, расположенные после работы 15, несомненно, являются оптимальными, и хотя на критическом пути и имеются некоторые сокращаемые работы, но фактически сократить их невозможно, так как они должны выполняться в периоды, когда нагрузка персонала является уже явно очень большой. Но руководитель примет в конце концов несколько другое решение: он предпочтет потерять несколько минут, для того чтобы обеспечить одновременное и возможно более быстрое выполнение работ 22, 25 и 26 (перемещение и установка передвижных мостков).

Рис. (11.8) дает это принятое решение; общая продолжительность работ сводится к 639 мин.

Цель исследования — выполнение ежедневного цикла, таким образом, нами достигнута, причем с меньшей численностью работающих, чем это предполагалось вначале. Затраты на это исследование весьма незначительны по сравнению с общим размером затрат.

12. Операции со случайной длительностью

Читатель уже получил представление об основных аспектах применения теории графов для представления проектов исследований или производства в случае, когда длительности операций известны и точно определены (детерминированы).

Значение такого подхода к научно-исследовательским или опытно-конструкторским проектам очевидно:

— инженер-плановик или руководство проекта имеет благодаря сети ясное и четкое представление о проекте. Четко выявляются связи различных операций. Само составление сети представляет уже первую и очень важную фазу, позволяющую уточнить развертывание операций;

— выявление критического пути (или нескольких путей) позволяет установить операции, определяющие ход выполнения всего комплекса операций. Эти «критические» операции в процессе реализации проекта должны выполняться точно по графику, и на них должны быть направлены наибольшие усилия;

— не относящиеся к критическому пути операции являются, напротив, менее жесткими и допускают некоторое запаздывание сроков их выполнения (резервы времени событий, свободные резервы времени операций).

На практике в очень большом числе проектов, главным образом в научно-исследовательских и опытно-конструкторских проектах, длительности t_{ij} операций недостаточно известны и неопределенны.

Здесь могут иметь место два случая: или неопределенные операции не являются новыми и мы приближенно знаем для каждой из этих операций закон распределения длительности операций, или эти операции — совсем новые или по крайней мере малоизученные и нам не известны законы распределения длительностей таких операций.

Первый случай относится, как правило, к опытно-конструкторским проектам в промышленности, второй — к научно-исследовательским проектам.

1) Если нам известны законы распределения длительностей операций, нетрудно определить среднее значение длительности (математическое ожидание) и дисперсию для каждой из этих операций.

Имеем, таким образом,

$$\bar{t}_{ij} \text{ и } \sigma_{ij}^2.$$

2) Если распределения длительностей операций неизвестны, то при применении метода ПЕРТ предполагают (для удобства вычислений), что эти длительности операций имеют β -распределение¹.

¹ См. описание этого распределения в приложении I, стр. 158.

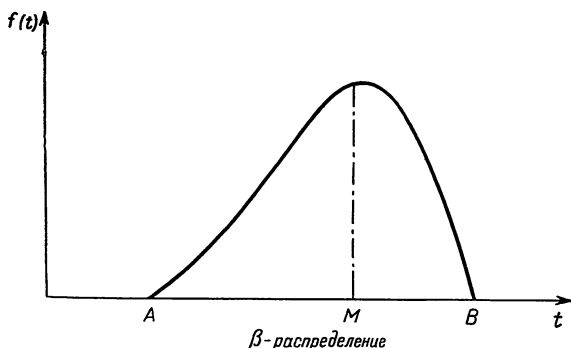
Выбор этого закона не может быть строго обоснован. Он имеет функцию плотности, напоминающую закон Гаусса, но ограниченную слева и справа. На рис. (12.1) представлена кривая β -распределения.

β -распределение, рассматриваемое в методе ПЕРТ, выбрано таким, что

$$E(t) = \bar{t} = \frac{1}{6}(A + 4M + B), \quad (12.1)$$

$$\sigma_t^2 = \left[\frac{1}{6}(B - A) \right]^2, \quad (12.2)$$

где A и B являются нижней и верхней границами случайной величины t ; M — наиболее вероятное значение t , или мода.



Р и с. 12.1. β -распределение.

Специалистам, ответственным за выполнение каждой из операций, должны быть поставлены следующие три вопроса:

1. Какова Ваша оценка минимальной длительности операции P_{ij} (оптимистическая оценка)? Пусть эта минимальная длительность равна a_{ij} .

2. Какова Ваша оценка максимальной длительности операции (пессимистическая оценка)? Пусть эта максимальная длительность равна b_{ij} .

3. Какое значение длительности операции представляется Вам наиболее вероятным (мода)? Пусть эта наиболее вероятная длительность равна m_{ij} .

Такая информация субъективна, и при ее сборе нужно проявлять определенную осторожность. В частности, следует сопоставить информацию, исходящую от разных специалистов по одной и той же операции (например, от руководителя лаборатории и его помощников), которые должны быть свободны от какого бы то ни было внешнего давления, могущего привести к смещению оценок.

Мы предположим, поскольку мы ничего не знаем, что эта информация доставляет несмещенные оценки $\hat{A}_{ij}$, $\hat{B}_{ij}$, $\hat{M}_{ij}$. Пусть

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \hat{A}_{ij}, \\ b_{ij} &= \hat{B}_{ij}, \\ m_{ij} &= \hat{M}_{ij}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Мы теперь можем написать

$$\begin{aligned} \hat{\bar{t}}_{ij} &= \frac{1}{6} [\hat{A}_{ij} + 4\hat{M}_{ij} + \hat{B}_{ij}] = \\ &= \frac{1}{6} [a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}]. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Запись $\hat{\bar{t}}_{ij}$ означает, что величина среднего члена в этом равенстве получена на основе несмещенных оценок среднего значения $\bar{t}_{ij}$; $\hat{\bar{t}}_{ij}$ — это оценка для $\bar{t}_{ij}$.

С точки зрения теории мы не имеем права написать

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = \left[\frac{\hat{B}_{ij} - \hat{A}_{ij}}{6} \right]^2 = \left[\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right]^2, \quad (12.5)$$

так как $\left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2$ не является оценкой дисперсии σ_{ij}^2 .

Однако, учитывая приближенность данных (приравнивание субъективных оценок к объективным) и полную эмпиричность принятых выше гипотез, можно считать, что не будет допущено большой погрешности, если принять в качестве оценки дисперсии величину

$$\left[\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right]^2.$$

Таким образом, мы получили (не придерживаясь во многих случаях строгой точности) оценки средней длительности операции P_{ij} и дисперсии времени выполнения операции. Именно эти оценки мы примем и будем записывать их без черточки и/или/крышечки.

$$t_{ij} = \frac{1}{6} (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}), \quad (12.6)$$

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2. \quad (12.7)$$

Располагая, таким образом, для каждой операции P_{ij} данными о среднем значении t_{ij} и дисперсии σ_{ij}^2 длительности операции (как в случае, когда закон распределения известен, так и в случае, когда имеется только априорная информация). Мы применяем для определения средних сроков наступления событий E_i и критического пути (или критических путей) метод, описанный в параграфе 8, приписывая каждой дуге среднее значение t_{ij} длительности операции.

Действительно, мы знаем, что математическое ожидание (среднее значение) суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий каждой из переменных

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2), \quad (12.8)$$

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n), \quad (12.9)$$

где символ E обозначает математическое ожидание случайной величины.

Обратимся опять к примеру, изображенному на рис. (8.2),

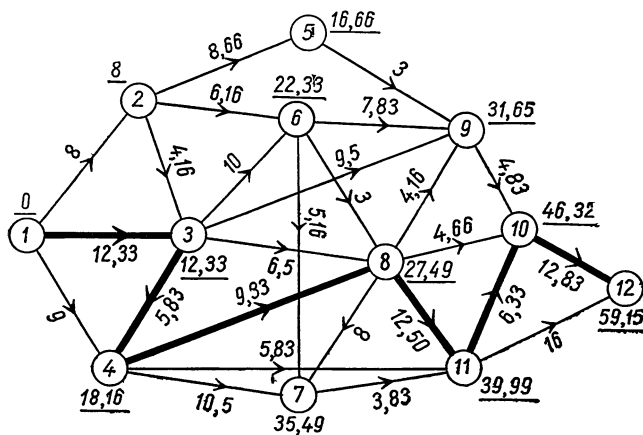


Рис. 12.2.

и предположим, что мы имеем дело с неопределенными величинами.

Величины, приписанные дугам на рис. (8.2), будут представлять теперь наиболее вероятные значения m_{ij} . Величины a_{ij} и b_{ij} приведены в таблице 12.1, где мы вычислили значения t_{ij} и σ_{ij}^2 по формулам (12.6) и (12.7).

Мы обратились к тому же самому примеру из соображений наглядности. Необходимо, однако, подчеркнуть, что в действительности мы имеем здесь дело с двумя различными задачами.

На рис. (12.2) мы воспроизводим сеть, представляющую некоторый проект. Каждой дуге, изображающей операцию,

приписано вычисленное значение t_{ij} , которое можно найти в таблице 12.1.

Таблица 12.1

P_{ij}	a_{ij}	b_{ij}	m_{ij}	t_{ij}	σ_{ij}^2
P_{12}	5	11	8	8	1
P_{13}	6	16	13	12,33	2,77
P_{14}	6	12	9	9	1
P_{23}	3	6	4	4,16	0,25
P_{25}	4	12	9	8,66	1,77
P_{26}	3	10	6	6,16	1,36
P_{34}	5	12	7	5,83	1,36
P_{36}	6	14	10	10	1,77
P_{38}	4	11	6	6,5	1,36
P_{39}	7	14	9	9,5	1,36
P_{47}	7	16	10	10,5	2,25
P_{48}	8	12	9	9,33	0,44
$P_{4,11}$	4	7	6	5,83	0,25
P_{59}	2	4	3	3	0,11
P_{67}	4	7	5	5,16	0,25
P_{68}	2	4	3	3	0,11
P_{69}	5	10	8	7,83	0,69
$P_{7,11}$	2	5	4	3,83	0,25
P_{87}	7	9	8	8	0,11
P_{89}	3	6	4	4,16	0,25
$P_{8,10}$	2	6	5	4,66	0,44
$P_{8,11}$	7	16	13	12,50	2,25
$P_{9,10}$	3	6	5	4,83	0,25
$P_{10,12}$	8	17	13	12,83	2,25
$P_{11,10}$	5	9	6	6,33	0,44
$P_{11,12}$	9	19	17	16	2,77

Подчеркнутые числа, вписанные около вершин, представляют теперь математические ожидания времени наступления событий E_i .

Так, событие E_{10} произойдет в среднем в момент 46,32, событие E_{11} — в среднем в момент 39,99 и событие E_{12} , т. е. завершение всех работ, — в среднем в момент 59,15¹.

Мы можем пойти еще дальше в изучении проекта, заметив, что по крайней мере для некоторого множества операций времена наступления соответствующих событий распределяются по нормальному закону. Этот факт имеет место в силу *Центральной предельной теоремы*, которую мы напомним.

«Если дана последовательность независимых случайных величин

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

с дисперсиями

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$$

и если дисперсии конечны, а их сумма бесконечно возрастает вместе с n , но так, что каждое отношение

$$\sigma_n^2 / \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

стремится к нулю, то величина

$$\xi_n = \frac{Z_n - E(Z_n)}{\sigma_{Z_n}},$$

где

$$Z_n = \sum X_i, \quad (12.10)$$

будет иметь в пределе нормированное нормальное распределение, каковы бы ни были законы распределения величин X_i .

Это означает, что сумма независимых случайных величин, каждая из которых имеет некоторое распределение, удовлетворяет, когда число этих случайных величин достаточно велико, нормальному закону (закону Гаусса) со средним значением, равным сумме средних значений, и дисперсией, равной сумме дисперсий слагаемых².

$$E(Z_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \quad (12.11)$$

и

$$\sigma_{Z_n}^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2. \quad (12.12)$$

¹ В данном примере критический путь, вычисленный по средним значениям, совпадает с критическим путем, вычисленным по наиболее вероятным значениям (модам), но это частный случай, справедливый лишь для величин, взятых в нашем примере.

² При дополнительных весьма общих условиях, которые выполняются, когда слагаемые удовлетворяют β -распределению.

Центральная предельная теорема применима (если сеть проекта достаточно велика) к событиям, наступающим в конце проекта, и в частности к конечному событию, представляющему собой завершение всех работ.

Необходимо, однако, сразу указать, что это справедливо только в тех случаях, когда длительности операций являются *независимыми* случайными величинами, что, вообще говоря, обычно предполагается, но что в некоторых случаях может и не иметь места. Поэтому каждый раз надо проверять справедливость гипотезы о независимости¹.

Так, в данном примере время наступления события E_{12} распределено по закону Гаусса со средним значением 59,15 и дисперсией, равной сумме дисперсий длительностей операций, образующих критический путь.

Обозначая через $t_{E_{12}}$ или, проще, через t_{12} случайное время наступления события E_{12} , приходим к равенству

$$\sigma^2(t_{E_{12}}) = \sigma^2(t_{12}) = \sigma^2(t_{13}) + \sigma^2(t_{34}) + \sigma^2(t_{48}) + \sigma^2(t_{8,11}) + \sigma^2(t_{11,10}) + \sigma^2(t_{10,12}),$$

что дает

$$\sigma^2(t_{12}) = 2,77 + 1,36 + 0,44 + 2,25 + 0,44 + 2,25 = 9,51.$$

Аналогично время наступления события E_{10} также распределяется по закону Гаусса со средним значением 46,32 и дисперсией

$$\sigma_{10}^2 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{34}^2 + \sigma_{48}^2 + \sigma_{8,11}^2 + \sigma_{11,10}^2 = 7,26.$$

Необходимо также заметить, что в нашем примере слишком мало операций, чтобы можно было со всей строгостью применить центральную предельную теорему². Так, время наступления события E_{12} вычислено всего по шести критическим операциям³.

Но сети реальных проектов имеют обычно гораздо больший объем и предыдущие вычисления вполне могут быть применены на практике.

На рис. (12.3) показано распределение времени наступления события E_{12} .

¹ Центральная предельная теорема не применима к конечному событию. Его время наступления t_n является максимальным значением сумм независимых случайных величин, обладающих общими слагаемыми, а не просто суммой независимых случайных величин. — *Прим. ред.*

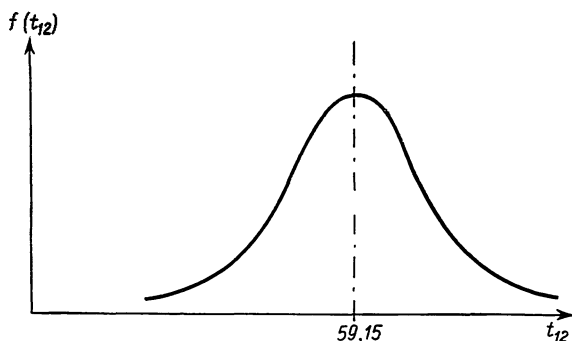
² Впрочем, если допустить, что рассматриваемые случайные величины дуг сети удовлетворяют β -распределению, можно показать, что сумма даже небольшого числа таких случайных величин довольно точно удовлетворяет нормальному закону.

³ См. примечание 1.

Таким образом, мы вычислили средние времена наступления событий E_i и мы знаем их распределения. Что же можно сказать о граничных сроках t_i^* ?

По определению, срок t_i^* для события E_i есть предельный срок, до которого может быть отложено начало операций P_{ij} , следующих за событием E_i , т. е. срок, превышение которого приводит к задержке выполнения всего проекта.

Среднее время, необходимое для выполнения операций, расположенных между E_i и E_n , получается отысканием в сети пути



Р и с. 12.3.

из E_i в E_n , имеющего наибольшее среднее значение. Это среднее время представляет собой таким образом не что иное, как величину максимального пути из E_i в E_n в сети проекта.

Если событие E_i не расположено слишком близко к концу проекта, можно утверждать, как и раньше, что среднее время, необходимое для выполнения операций, находящихся между E_i и E_n , распределено по нормальному закону, дисперсия которого равна сумме дисперсий длительностей операций, составляющих максимальный путь из E_i в E_n ¹.

Если же событие E_i расположено вблизи конечного события, то в этом случае мы ничего не можем сказать относительно распределения интересующего нас среднего времени, о котором говорилось выше.

Возьмем еще раз сеть, изображенную на рис. (12.2), а также данные таблицы 12.1 и рассмотрим событие E_6 . Вычисление среднего времени, необходимого для выполнения операций, расположенных между E_6 и E_{12} , проводится отысканием при помощи метода, описанного в параграфе 10, максимального пути из E_6 в E_{12} .

Мы воспроизвели на сети, изображенной на рис. (12.4), только те операции, которые следуют за E_6 .

¹ См. примечание 1 на стр. 83.

Величина максимального пути из E_6 в E_{12} равна 34, 66. Это среднее время, достаточное для того, чтобы выполнить операции, следующие за E_6 .

Дисперсия распределения этого среднего времени равна

$$\sigma_{68}^2 + \sigma_{8,11}^2 + \sigma_{11,10}^2 + \sigma_{10,12}^2,$$

т. е.

$$0,11 + 2,25 + 0,44 + 2,25 = 5,05.$$

Вид распределения, предполагаемого нормальным (четырёх случайных величин недостаточно для возможности вполне стро-

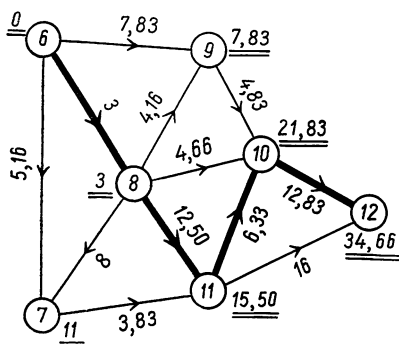


Рис. 12.4.

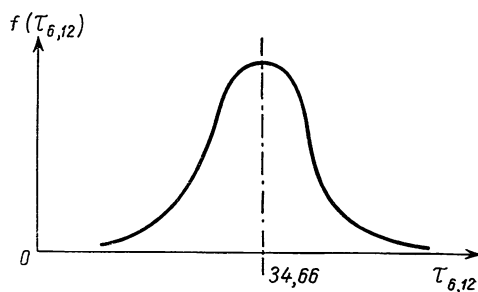


Рис. 12.5.

гого применения центральной предельной теоремы), приведен на рис. (12.5).

Мы знаем, кроме того, что срок завершения работ t_{12} имеет среднее значение 59,15.

Таким образом, мы можем принять в качестве граничного срока t_6^* время $59,15 - 34,66 = 24,49$. Именно эта величина принимается в методе ПЕРТ.

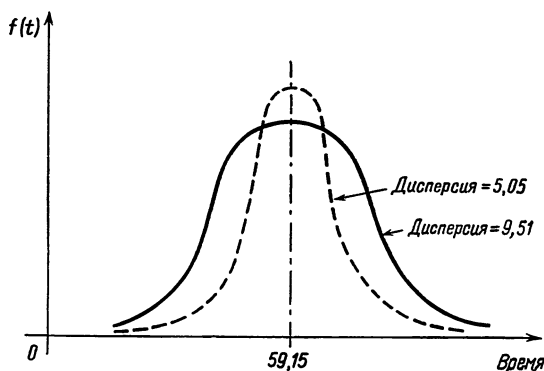
На рис. (12.6) показано, что произойдет с распределением времени t_{12} , если отложить начало операций P_{69} , P_{68} и P_{67} до момента 24,49.

Эту дату — 24,49 можно принять, не рискуя сильно нарушить дату завершения всего проекта.

Само собой разумеется, для уменьшения риска лучше было бы принять в качестве граничного срока для E_6 , например, 23, см. рис. (12.7).

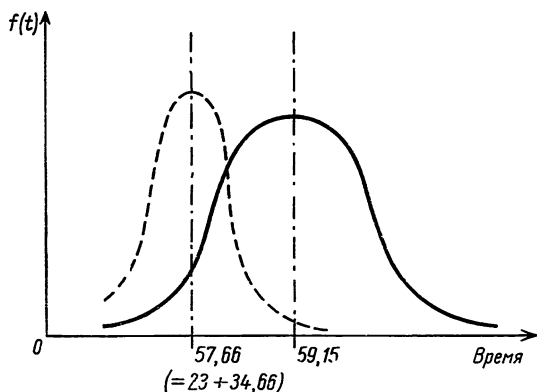
В этом случае мы будем гораздо более уверены, что дата наступления события E_{12} будет продиктована исходным критическим путем [1, 3, 4, 8, 11, 10, 12], см. рис. (12.2), а не операциями пути [6, 8, 11, 10, 12], см. рис. (12.4).

Но как бы то ни было, мы будем придерживаться метода ПЕРТ и возьмем в качестве граничного срока наступления события E_6 время 24,49.



Р и с. 12.6.

Итак, как правило, граничный срок t_i^* наступления события E_i получается вычитанием из среднего времени t_n конечного события E_n среднего времени, необходимого для выполнения операций, следующих за E_i .



Р и с. 12.7.

Таким образом, здесь применяется тот же метод, что и в параграфе 9, где длительности операций были детерминированы, но при этом используются средние длительности операций, см. рис. (12.2).

$$t_i^* = t_n - \tau_{in}, \quad (12.13)$$

где τ_{in} представляет собой среднее время, необходимое для наступления событий, следующих за E_i .

В итоге для каждого события E_i нам известно его среднее

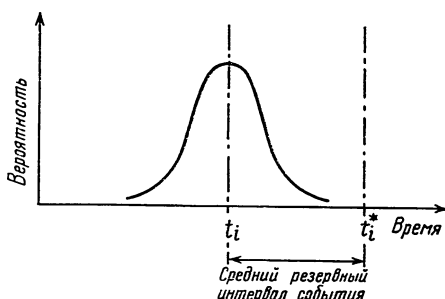
время наступления t_i и соответствующее распределение, а также граничный срок t_i^* . Используемые алгоритмы те же, что и в параграфе 10, только вместо детерминированных длительностей операций, которые там рассматривались, надо брать средние длительности операций.

Теперь мы определим «средний» интервал свободы (резервный интервал) события E_i , см. рис. (12.8),

$$[t_i, t_i^*] \quad (12.14)$$

и «средний» свободный резерв операции P_{ij}

$$t_j - t_i - t_{ij}. \quad (12.15)$$



Р и с. 12.8.

Необходимо заметить, что интервалом свободы (резервным интервалом) события мы будем называть также величину $t_i^* - t_i^1$, когда это не приводит к путанице.

13. Реализация календарного плана

Составление календарного плана заключается в установлении сроков наступления определенных событий и, в частности, конечного события, соответствующего выполнению всей программы.

Представляет интерес рассматривать события, лежащие на критическом пути, поскольку именно они обуславливают реализацию проекта.

Зная законы распределения сроков наступления событий в конце проекта, легко вычислить вероятность выполнения или невыполнения этих событий в установленные календарные сро-

¹ Напомним, что величина $t_i^* - t_i$ называется резервом времени события. — *Прим. перев.*

ки, тем более что эти распределения, как мы видели выше, являются нормальными или почти нормальными.

Обратимся опять к примеру, изображенному на рис. (12.2), и предположим, что он связан с проектом строительства дачи и что по каким-то причинам владелец будущей дачи поставил условием архитектору или подрядчику вручить ему ключи к сроку 61. Это условие записано в контракте, и нарушение срока влечет для подрядчика штраф, пропорциональный запаздыванию.

Учитывая это, подрядчик, прежде чем менять что-либо в проекте, оценит риск, с которым связано нарушение установленного срока.

Если контракт предусматривает дату окончания строительства 61, то оценка риска нарушения контракта производится следующим образом.

Срок t_{12} наступления события E_{12} распределен по закону Гаусса со средней 59,15 и дисперсией $\sigma_{12}^2 = 9,51$.

Нормированная переменная

$$x = \frac{t_{12} - 59,15}{\sigma_{12}}$$

распределена по нормированному нормальному закону.

Для $t_{12}=61$

$$x = \frac{61 - 59,15}{3,085} = 0,599 \approx 0,6.$$

Из таблицы функции распределения нормированного нормального закона получаем соответствующую вероятность — 0,7257.

Таким образом, вероятность реализации проекта к сроку 61 равна 0,7257; иначе говоря, имеется более 70 шансов из 100 за то, что дача будет закончена раньше или к сроку 61. Вероятность же того, что дача не будет закончена к сроку 61, равна $1 - 0,7257 = 0,2743$. Иначе говоря, имеется менее 30 шансов за то, что дача не будет закончена к сроку 61.

Следовательно, риск быть оштрафованным довольно значителен для подрядчика. Если контракт предусматривает дату окончания строительства 62, вероятность просрочки будет равна $1 - 0,8212 = 0,1788$.

Если же контракт предусматривает дату окончания строительства 63, то вероятность просрочки будет равна $1 - 0,8925 = 0,1075$.

Наконец, если в контракте записана дата 64, вероятность невыполнения предусмотренного срока составит не больше $1 - 0,9418 = 0,0582$, т. е. риск для подрядчика не выполнить контракт составит не больше 5,82%.

Эти результаты имеют очень важное значение для подрядчика.

Если имеется возможность ускорить работы, он проверит, исходя из даты, записанной в контракте, можно ли уложиться в установленный срок или нет. При этом он учтет в своем решении, что всякое ускорение работ влечет обычно возрастание их стоимости.

Если же возможность ускорить работы отсутствует, то такие расчеты позволяют ему точно определить, имеет ли смысл

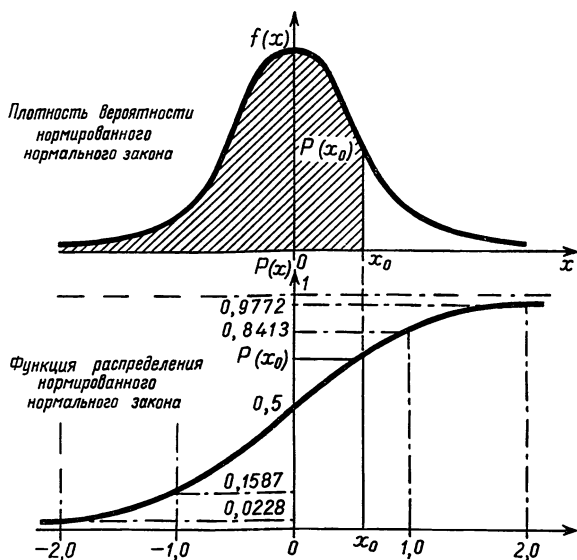


Рис. 13.1.

браться за работу или целесообразнее отказаться от нее, принимая во внимание срок, установленный контрактом, и предусмотренные им ставки штрафа.

Рис. (13.1) дает представление о функции плотности и функции распределения нормированного нормального закона.

14. Использование электронных вычислительных машин

Примеры, приведенные в предыдущих параграфах, относились к очень простым проектам, содержащим совсем небольшое число операций. На практике научно-исследовательские или опытно-конструкторские проекты, особенно когда анализ их очень углублен, содержат десятки, а иногда и сотни операций. В этом случае становится необходимостью использование электронных вычислительных машин (ЭВМ). Здесь заслуживают

внимания два аспекта: вычисление временных характеристик проекта и контроль проекта в процессе его выполнения.

Вычисление временных характеристик проекта

Изложенный метод позволяет, как мы видели, получить, исходя из сети проекта, следующие сведения:

- средние сроки реализации t_i и граничные сроки t_i^* наступления различных событий E_i ;
- средние резервы времени событий и свободные резервы времени некритических операций;
- вероятность соблюдения установленных заранее календарных сроков для событий в конце проекта.

Если план выполнения проекта удовлетворителен, т. е. вероятность соблюдения установленных календарных сроков достаточно велика, проект утверждается и план принимается к исполнению. В противном случае следует подумать о пересмотре плана с тем, чтобы попытаться уменьшить длительности критических операций, используя, например, дополнительные ресурсы, за счет, может быть, операций, имеющих большие свободные резервы.

В конце концов так или иначе должен быть установлен четкий план, отвечающий всем предъявляемым к нему требованиям.

Контроль проекта в процессе его выполнения

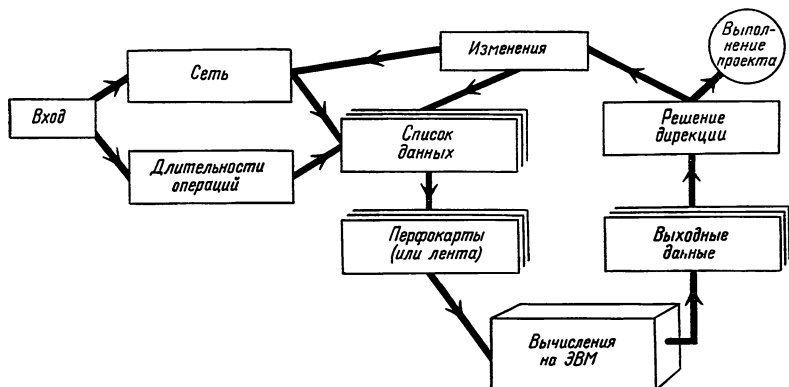
По мере выполнения проекта фактические данные заменяют собой оценки, сделанные ранее с большей или меньшей точностью. Эти новые данные вводятся в вычислительную машину, что позволяет осуществлять постоянный контроль за выполнением проекта и уточнять перспективы его выполнения в будущем с учетом данных об его фактическом выполнении. Таким образом, создается возможность обеспечить соблюдение сроков, предписанных контрактом, путем изменения или ускорения некоторых операций.

В результате этого лицо, ответственное за выполнение проекта, получает возможность располагать таким инструментом предвидения и контроля, который позволяет ему принимать корректирующие решения, когда оно сочтет это целесообразным или когда в этом возникнет необходимость, см. рис. (14.1).

Форма входящей и выходящей документации может быть самая различная и приспособляется по возможности к конкретным потребностям каждого типа проектов. Кроме полной таблицы результатов вычислений (таблица 14.1), являющейся своего рода основным рабочим документом при использовании

метода ПЕРТ, можно предусмотреть автоматическую выдачу различной документации и графиков:

- перечень критических событий или операций;
- перечень событий или операций, упорядоченный в зависимости от величины резерва события или свободного резерва операции;
- график отклонений (в большую или меньшую сторону) сроков наступления событий по отношению к соответствующим установленным, желательным или вычисленным ранее срокам;
- график, наглядно показывающий предусмотренный планом ход реализации проекта: вычисленные сроки наступления событий и соответствующие им резервы событий;
- график Ганта операций проекта, на котором показаны резервы времени.



Р и с. 14.1.

Наконец, важно подчеркнуть, что программа для машины, основной элемент применяемого метода, составляет один раз навсегда, если не считать модификаций, которые вносятся в случае необходимости в выходную информацию (характер и вид, которые желательно придать документам, форма их представления и т. д.).

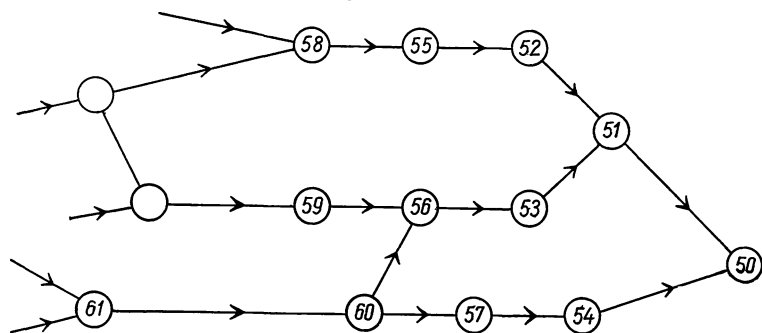
В случае, когда исследуемый проект содержит относительно ограниченное число элементарных операций, рассматриваемый метод может быть с успехом применен без обращения к вычислительной машине, во всяком случае, для получения временных характеристик проекта. При выполнении же функций контроля выполнения проекта, наоборот, необходимо отказаться от обработки данных ручным способом, если ставится задача обеспечения частого и быстрого контроля.

Таблица 14.1 — «Выходная информация» соответствует одной из частей сети, приведенной на рис. (14.2).

Таблица 14.1

Событие, №	Ожидаемый срок выполнения t_i		Предельный срок выполнения t_i^*		Резерв события $t_i^* - t_i$	Установ- ленный срок	Вероят- ность соблюде- ния срока
	среднее значение	дисперсия	среднее значение	дисперсия			
50	92	38	92	0	0	82	0,05
51	85	35	85	3	0	77	0,09
54	74	29	82	4	8	73	0,42
52	47	25	74	7	27	70	1,0
53	70	31	70	7	0	60	0,02
57	56	23	64	10	8	55	0,42
...							
E_1	(начало выполнения проекта)						

В заключение отметим, что основное преимущество метода ПЕРТ и его разновидностей состоит в возможности отдать себе отчет по мере выполнения работ в том, какие перемещения



Р и с. 14.2.

должны быть произведены в сроках и на каких участках должны быть сосредоточены особые усилия. Критический путь на самом деле не всегда является одним и тем же. Он может изменяться в зависимости от непредвиденных обстоятельств. При этом всегда остается возможность изучить влияние этих обстоятельств на вероятную дату завершения работ и ввести новые работы (например, по дополнительным договорам), исчислив результаты, которые могут быть при этом получены.

Короче говоря, речь идет об инструменте, который постоянно совершенствуется, используется непрерывно и дает возможность в любой момент определять направление и последовательность предпринимаемых действий.

Г Л А В А 3

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ПЕРТ

15. Введение

В этой главе будет дано обобщение метода ПЕРТ. Будет рассмотрена стохастическая модель, особенно успешно применяемая к научно-исследовательским проектам, для которых не всегда возможно составить полностью определенную (детерминированную) сеть.

16. Решающие события¹

Во многих научно-исследовательских или опытно-конструкторских проектах некоторые события обладают той особенностью, что от их результата зависит дальнейшее развертывание проекта. Иначе говоря, нельзя полностью определить проект, поскольку результат некоторых операций или событий влияет на последующий ход реализации проекта. Такие события мы будем называть «решающими». В одном проекте может быть несколько решающих событий. Такие события постоянно возникают в проектах, содержащих исследования или эксперименты, ход которых зависит от результатов некоторых из них. Они встречаются также и в опытно-конструкторских проектах.

Простой пример позволит читателю лучше уяснить суть дела. Геологическая разведка рудной компании после серии геофизических измерений местности обнаружила большое месторождение свинцовых руд в определенном районе Северн. Инженер-геолог после заключительных поисков оценил мощность месторождения в 2 млн. т и среднее содержание свинца — в 2,5% (на основании анализа отобранных образцов и произведенного разведочного бурения).

Дирекция компании заинтересована в этом месторождении и, основываясь на оптимистических выводах геологов, решает

¹ В параграфах 16 и 21 мы используем, в частности, работы Говарда Эйснера (Howard Eisner) [18].

соорудить шахту и в случае необходимости обогатительную фабрику. Принятая, таким образом, программа работ предусматривает, очевидно, систематическую разведку месторождения. От результатов этой разведки будут зависеть последующие операции проекта. В самом деле, размещение рудников и их величина будут различными в зависимости от того, отвечают или нет объем и качество месторождения возлагаемым надеждам. Таким же образом можно допустить, что необходимость в обогатительной фабрике отпадает, если мощность месторождения окажется очень незначительной. В этом случае руда будет доставляться на самосвалах и по железной дороге на ближайший завод компании, на котором и будет производиться ее обработка.

На этом примере видно, что здесь не одна, а несколько программ работ и выбор той или иной из них зависит от результатов разведки. Результат разведки и представляет собой в этом примере решающее событие.

Предположим для простоты, что имеются только три возможности в зависимости от результатов разведки:

1. Месторождение очень велико и оправдывает сооружение трех шахтных стволов (из которых два предназначаются для вентиляции и спуска людей и один — для выемки руды) и одной обогатительной фабрики.

2. Месторождение средней мощности, и необходимы только два шахтных ствола.

3. Месторождение малой мощности; необходимы только два шахтных ствола и сравнительно незначительное оборудование.

Для ввода рудника в эксплуатацию нужно выполнить следующие операции:

- а) получение разрешения на эксплуатацию;
- б) прокладка 6-километровой дороги;
- с) доставка и установка двух разведывательных буровых станков;
- д) сооружение временного помещения для планового бюро и жилищ для рабочих разведывательных партий;
- е) асфальтирование дороги;
- ф) подвод воды;
- г) разведка;
- h₁) проходка и оборудование трех шахтных стволов;
- h₂) проходка и оборудование двух шахтных стволов;
- i₁) доставка и размещение оборудования для эксплуатации первого типа;
- i₂) доставка и размещение оборудования для эксплуатации второго типа;
- i₃) доставка и размещение оборудования для эксплуатации третьего типа;

- ж₁) строительство помещения для конторы и жилищ для рабочих и инженеров;
- ж₂) строительство помещения для конторы и жилищ для рабочих и инженеров;
- ж₃) строительство помещения для конторы и жилищ для рабочих и инженеров;
- к) подготовительные работы и оборудование подземного хозяйства рудника;

л) сооружение обогатительной фабрики.

Целью проекта является ввод месторождения в эксплуатацию. В пункте k имеются в виду подготовительные работы, которые обязательно должны быть проведены перед вводом в эксплуатацию. Наконец, операция «строительство жилищ для рабочих» будет, очевидно, различной для рудников разной мощности.

Объединим три программы различных работ в одну. Тогда мы получим «обобщенную», или «стохастическую», сеть, изображенную на рис. (16.1).

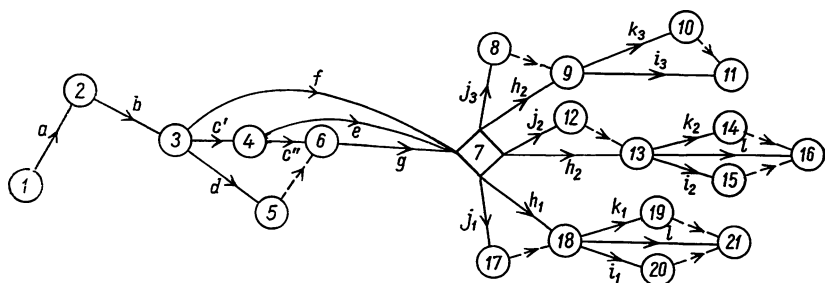


Рис. 16.1.

Операция c разбита на две — c' и c'' , так как предполагается, что нельзя приступать к асфальтированию дороги прежде, чем оборудование для разведки будет доставлено на место. Фиктивные операции, изображенные на рисунке пунктирными линиями, введены в соответствии с правилами, установленными в главе 2. Событие 7, являющееся решающим на этой стохастической сети, показано в ромбике.

В сети имеются три конечных события E_{11} , E_{16} и E_{21} . Теперь перед нами стоит задача определить вероятности реализации для этих трех конечных событий. При отсутствии каких-либо дополнительных предположений можно произвольно допустить, что каждое из конечных событий наступает с вероятностью 0,33. Но инженер-геолог может иметь серьезные основания считать, что наиболее вероятной будет возможность наступления первого из трех событий. Зададим тогда вероятность события E_{21} , например 0,75, вероятность события E_{16} — 0,10 и события E_{11} — 0,15.

Таким образом, плановик может сказать, что имеется 75 шансов из 100 за то, что будет реализована первая возможность и средняя продолжительность работ будет соответствовать событию E_{21} . Этот простой пример, имеющий лишь отдаленное отношение к реальным условиям ввода в эксплуатацию месторождений, позволит читателю уяснить сущность решающих событий и понять, каким образом они могут быть представлены в сети.

17. Некоторые уточнения используемой терминологии

Введение понятия решающего события позволяет принимать в расчет альтернативы, которые возникают на некоторых этапах реализации проекта; будут ли использованы многие операции или нет, зависит от того, выполнены или нет некоторые соотношения.

Два пути, выходящие из решающего события, называются «конъюнктивными», если их начальные операции должны быть обе либо выполнены, либо нет. Если же из этих операций реализуется только одна, а другая исключается, то такие пути называются «дизъюнктивными», см. рис. (17.1). Дуги путей 1 и 2 здесь дизъюнктивны.

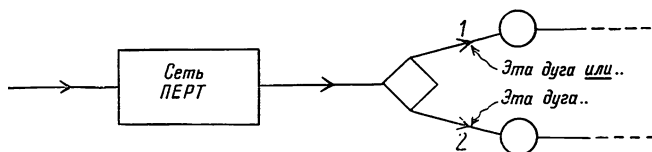


Рис. 17.1.

Сеть типа ПЕРТ, рассмотренную в главе 2, можно считать частным случаем более общей стохастической сети, так как сеть ПЕРТ состоит только из конъюнктивных путей.

Заслуживают некоторого внимания две специальные конфигурации стохастической сети. Именно

- наличие зависимости между конъюнктивными путями;
- слияние конъюнктивных путей.

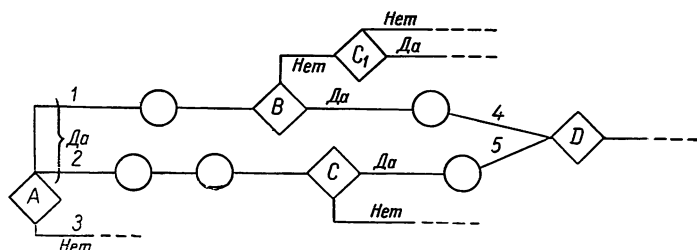
1) Зависимость конъюнктивных путей имеет место, когда выбор операции, подлежащей выполнению, зависит от исхода решающего события, находящегося на конъюнктивном с ним пути. Этот случай показан на рис. (17.2). Пути 1 и 2 конъюнктивны, каждый из них приводит к решающему событию — соответственно к B и C .

Предположим теперь, что ответ B отрицателен и будущие операции зависят от ответа C . Чтобы представить это в сети,

нужно повторить решающее событие C , введя дополнительное событие C_1 , см. рис. (17.2). Необходимо отметить, что C_1 и C идентичны и что C_1 должно наступать одновременно с C или позднее.

2) Вторая специальная конфигурация стохастической сети — это слияние двух конъюнктивных путей.

Эта ситуация имеет место, когда два или несколько конъюнктивных путей сходятся в некоторой вершине после того, как



Р и с. 17.2.

каждый из них пройдет через решающее событие. На примере, изображенном на рис. (17.2), такой вершиной является событие D . Здесь пути 4 и 5 сходятся, и для того чтобы вершина D была достигнута, необходимо, чтобы ответы B и C оба были утвердительными.

18. Определение возможных конечных событий (исходов)

Поскольку стохастическая сеть позволяет представлять альтернативы, ясно, что не все конечные события реализуемы. Здесь могут быть выявлены некоторые ограничения.

Если обозначить символом $\oplus$ операцию дизъюнктивной суммы и символом $\cap$ — операцию пересечения, то следующее выражение укажет в логической форме множество возможных конечных событий (исходов) для сети научно-исследовательского проекта, приведенной на рис. (18.1).

Возможные конечные события (исходы)

$$\{[(A \oplus B) \oplus X] \cap (Y \oplus E)\} \oplus \{(G \oplus H) \oplus F\}, \quad (18.1)$$

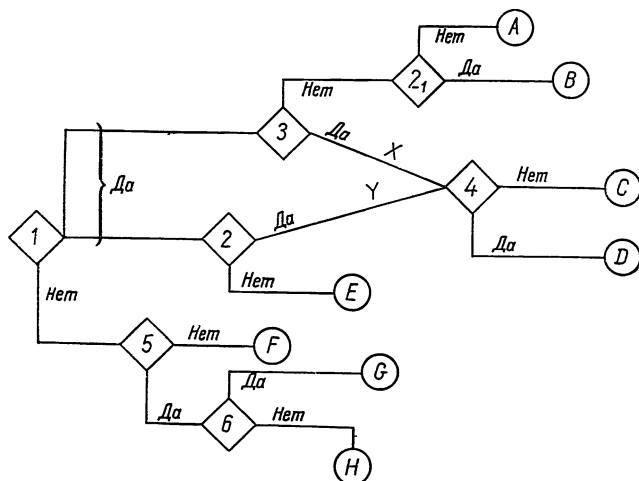
где

$$X \cap Y = C \oplus D. \quad (18.2)$$

Основываясь на выражении (18.1), мы получим следующие возможные исходы:

$$\begin{array}{ll}
 (A \text{ и } Y) & (X \text{ и } Y) = (C \text{ или } D) \\
 (A \text{ и } E) & (X \text{ и } E) \\
 (B \text{ и } Y) & G \\
 (B \text{ и } E) & H \\
 & F
 \end{array} \quad (18.3)$$

Зависимость между конъюнктивными путями, представленная событиями 2 и 2₁, ограничивает возможные исходы и делает некоторые из них невозможными. Замечая, что $(X \text{ и } Y)$



Р и с. 18.1. В этой сети представлены только решающие события; обычные события исключены.

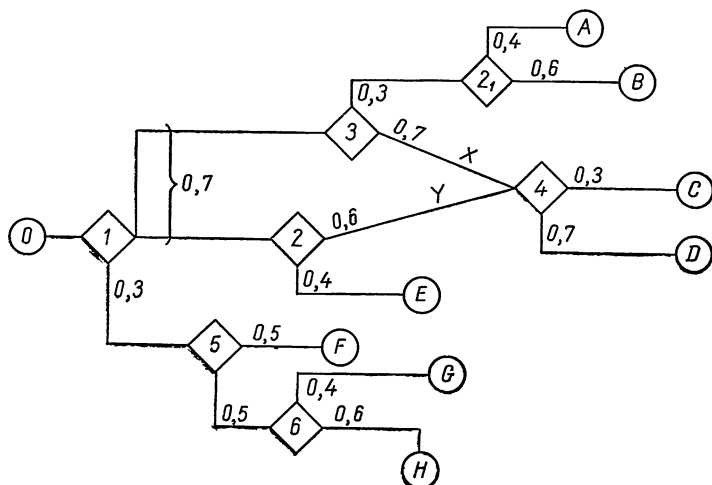
равно $(C \text{ или } D)$, можно дать следующий перечень возможных конечных событий (исходов):

$$\begin{array}{l}
 A \text{ и } E \\
 B \text{ и } Y \\
 C \\
 D \\
 X \text{ и } E \\
 G \\
 H \\
 F
 \end{array} \quad (18.4)$$

Теперь, когда все возможные исходы перечислены, мы можем классифицировать их в терминах вероятности реализации.

19. Вероятности наступления конечных исходов

Априорные вероятности приписаны теперь каждой альтернативе решающих событий. Это то, что мы сделали в параграфе 16, приписав первой возможности априорную вероятность 0,75, второй возможности — 0,10 и третьей — 0,15. Кстати, надо заметить, что решающие события могут приводить к нескольким возможностям (многозначные события) — к трем в примере



Р и с. 19.1.

Исход	Вероятность
<i>D</i>	0,2058
<i>X</i> и <i>E</i>	0,1960
<i>F</i>	0,15
<i>B</i> и <i>Y</i>	0,126
<i>H</i>	0,09
<i>C</i>	0,0882
<i>A</i> и <i>E</i>	0,084
<i>G</i>	0,06

Энтропия $H = 2,88$

$H_{\max} = 3$

$E = 0,96$

параграфа 16. Но всегда есть возможность вводить в сеть только двузначные решающие события, как в примере, изображенном на рис. (18.1).

На рис. (19.1) приведена сеть (18.1) с приписанными априорными вероятностями.

Как отмечалось выше, сеть типа ПЕРТ можно считать частным случаем стохастической сети, в которой только один дизъюнктивный путь или множество конъюнктивных путей, где каждому решающему событию приписана вероятность одного ответа, равная 1.

Теперь мы можем вычислить вероятности наступления конечных событий (исходов) сети (19.1), исходя из априорных вероятностей результатов решающих событий.

Конечные исходы	Вероятности событий				Вероятности конечных исходов
<i>A</i> и <i>E</i>	$p(A) \cdot p(E/A)$	$= (0,4)$	$(0,3)$	$(0,7)$	$(1) = 0,084$
<i>B</i> и <i>Y</i>	$p(B) \cdot p(Y/B)$	$= (0,6)$	$(0,3)$	$(0,7)$	$(1) = 0,126$
<i>C</i>	$p(C) \cdot p(X) \cdot p(Y)$	$= (0,3)$	$(0,7)$	$(0,7)$	$(0,6) = 0,0882$
<i>D</i>	$p(D) \cdot p(X) \cdot p(Y)$	$= (0,7)$	$(0,7)$	$(0,7)$	$(0,6) = 0,2058$
<i>X</i> и <i>E</i>	$p(X) \cdot p(E/X)$	$= (0,7)$	$(0,7)$	$(0,4)$	$= 0,196$
<i>G</i>	$p(G)$	$= (0,4)$	$(0,5)$	$(0,3)$	$= 0,06$
<i>H</i>	$p(H)$	$= (0,6)$	$(0,5)$	$(0,3)$	$= 0,09$
<i>F</i>	$p(F)$	$= (0,5)$	$(0,3)$		$= 0,15$

20. Функция энтропии

Классификация возможных исходов в зависимости от вероятностей их реализации — это очень важный практический результат. В данном примере событие *D* имеет наибольшую вероятность, далее следует исход (*X* и *E*). Наименьшую вероятность имеет событие *G*. Лучше пользоваться этими вероятностями, сопоставляя их друг с другом, чем пытаться судить об исходах по абсолютным значениям их вероятностей, так как вероятности конечных исходов в общем случае убывают при возрастании длины сети и числа решающих событий.

В связи с этим можно использовать функцию энтропии, хорошо известную в физике и в теории информации, которая дает количественную меру предпочтения, с точки зрения вероятности отдаваемого одним исходом по сравнению с другими. Эта функция определяется так:

$$H = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i, \quad (20.1)$$

где *H* — энтропия,

p_i — априорная вероятность *i*-го исхода,

N — число исходов.

Например, в ситуации дихотомического выбора с априорными вероятностями, равными $1/2$, $H=1$, так как логарифм берется по основанию 2. Когда вероятности равны 1 и 0, $H=0$. Функция энтропии имеет максимальную величину $\log_2 N$, когда все априорные вероятности равны.

Мерой неопределенности системы служит показатель «Относительной энтропии», определяемый так:

$$E = H/H_{\max}. \quad (20.2)$$

Эта величина может использоваться как показатель того, в какой мере одни исходы более вероятны, чем другие.

Для сети, изображенной на рис. (19.1),

$$H_{\max} = \log_2 8 = 3,$$

$$H = - \sum_{i=1}^{n=8} p_i \log_2 p_i = 2,88,$$

$$E = \frac{2,88}{3} = 0,96.$$

21. Обобщенный метод ПЕРТ

Вводя решающие события и приписывая их результатам априорные вероятности, мы получаем обобщенный метод ПЕРТ, используемый особенно при управлении научно-исследовательскими проектами. Априорные вероятности, приписываемые решающим событиям, могут быть объективными и субъективными. В последнем случае они основываются на предположениях и интуиции опрошенных специалистов.

Вернемся к примеру, изображенному на рис. (19.1), и зададим средние длительности операций таблицей 21.1.

Таблица 21.1

Операции	Средние длительности	Операции	Средние длительности
P_{01}	4	$P_{2,E}$	9
P_{13}	4	$P_{4,C}$	5
P_{12}	11	$P_{4,D}$	9
$P_{3, 2_1}$	0	P_{15}	12
$P_{2_1, A}$	6	$P_{5,F}$	3
$P_{2_1, B}$	13	P_{56}	7
P_{34}	8	$P_{6,G}$	9
P_{24}	6	$P_{6,H}$	10

На рис. (21.1) дано представление этой сети с учетом масштаба времени.

В соответствии с задачами каждого отдельного проекта можно получать различную информацию, такую, например, как критический путь, вероятности соблюдения некоторых предварительно установленных календарных сроков (взвешивая вероятности соответствующих путей) и т. д.

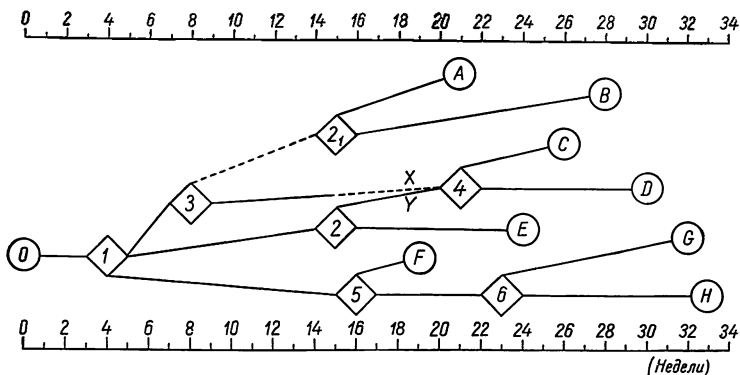


Рис. 21.1.

Знание вероятностей конечных исходов и средних сроков реализации событий дает возможность получить представление о будущем ходе реализации проекта. Так, в нашем примере наиболее вероятным является исход *D*. К нему приводят пути

0 — 1 — 3 — 4 и 0 — 1 — 2 — 4.

Время его реализации — 30 недель. Аналогично исход (*X* и *E*) имеет вероятность реализации 0,196 и цель *E* будет достигнута в среднем к моменту 24. На рисунке отмечено, что в тот момент, когда выясняется, что результат события 2 ведет к *E*, операция P_{34} , приводящая к *X*, может быть прервана, так как для реализации события 4 необходимо, чтобы были выполнены и операция *X* и операция *Y*. Заметим наконец, что событие 2₁ может быть помещено не раньше события 2.

Относительная энтропия может быть использована как мера степени предпочтения по вероятности одних конечных исходов другим, выражающаяся одним числом. Относительная энтропия, равная 1, указывает, что все конечные исходы имеют одну и ту же вероятность (равновероятны), тогда как относительная энтропия, равная нулю, указывает на вырождение сети в сеть типа ПЕРТ, где некоторый конечный исход реализуется с абсолютной достоверностью, а все другие исходы абсолютно исключаются.

В заключение укажем, что информация, доставляемая обобщенным методом ПЕРТ, позволяет руководству или планисту сравнивать различные альтернативы программы на базе трех характеристик: их относительных шансов на выполнение, операций, из которых они состоят, и соответствующих им средних дат реализации. Применение этого метода является особенно целесообразным при управлении научно-исследовательскими проектами, но он вполне применим также и при управлении некоторыми опытно-конструкторскими проектами.

Г Л А В А 4

ОПТИМИЗАЦИЯ СТОИМОСТИ ПРОЕКТА (КОМПЛЕКСА ОПЕРАЦИЙ)

22. Введение

В главе 2 была рассмотрена различная, весьма интересная информация, которая может быть получена в результате применения метода ПЕРТ. Так, нахождение критического пути (путей) позволяет выявить ключевые операции, определяющие ход выполнения проекта, в частности среднюю продолжительность его реализации. Вычисление резервов времени событий и свободных резервов времени операций дает представление об эластичности некритических событий и операций и о той степени свободы, которой можно будет располагать при их выполнении. Возможность располагать такими сведениями в фазе «контроль проекта в процессе его выполнения» имеет важное значение. При осуществлении проекта могут возникнуть новые критические операции, не предусмотренные в первоначальном плане реализации проекта и требующие внимания со стороны руководства. В этих случаях руководство будет располагать информацией, необходимой для определения того, куда именно должны быть направлены усилия, чтобы уложиться в намеченные сроки.

В общем случае длительности операций, детерминированные или случайные, меняются в зависимости от стоимости операции. Ускорение работы ведет, как правило, к возрастанию ее стоимости.

Это как раз тот аспект, на котором мы хотим сейчас сосредоточить внимание, и целью этой главы является рассмотрение того, каким образом при некоторых ограничениях проект может быть оптимизирован по стоимости.

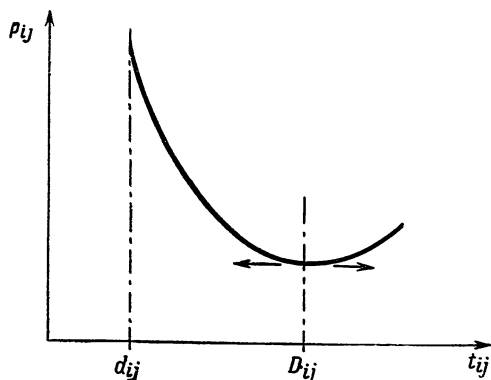
23. Некоторые общие соображения

Длительность каждой операции t_{ij} может изменяться между двумя границами d_{ij} и D_{ij} , определяемыми техническими или экономическими соображениями. Длительность операции D_{ij} со-

ответствует нормальному времени выполнения операции P_{ij} : эта длительность соответствует минимальной стоимости. Длительность операции d_{ij} соответствует, напротив, такому времени выполнения операции, когда она (операция) ускорена до максимума и ей соответствует максимальная стоимость.

Обозначая через p_{ij} стоимость операции P_{ij} при длительности t_{ij} , мы можем допустить, что $p_{ij} = f(t_{ij})^1$ представляет собой функцию вида, изображенного на рис. (23.1). Стоимость возрастает, когда t_{ij} убывает вплоть до d_{ij} — границы, за которой работа уже не может выполняться. Представляется достаточно правдоподобным, что стоимость проходит через очень пологий минимум и затем возрастает в силу ненормальных условий работы, связанных с недостатком рабочей силы или материалов.

Если взять в качестве длительностей операций нормальные длительности D_{ij} , общая продолжительность выполнения проекта будет нормальной: составленный таким образом план реализации проекта будет «нормальным». Напротив, если ускорить до максимума каждую операцию и взять в качестве длительностей



Р и с. 23.1.

каждой из операций значения d_{ij} , то полученный план реализации проекта будет называться «срочным».

Нужно отметить, что здесь мы разбираем случай, когда длительности операций представляют собой величины детерминированные, а не случайные; иначе говоря, при данной стоимости операции ее длительность вполне определена (и так для каждой операции) с помощью функции вида, приведенного на рис. (23.1).

Сейчас мы рассмотрим два аспекта, представляющие интерес с точки зрения оптимизации плана выполнения проекта на основе информации, получаемой в результате применения метода критического пути.

¹ Здесь и далее следовало бы писать $p_{ij} = f_{ij}(t_{ij})$, так как вид функции f , вообще говоря, зависит от операции (i, j) . — Прим. ред.

24. Уменьшение полной стоимости проекта (комплекса операций)

В этом параграфе мы не будем заниматься отысканием оптимального плана реализации проекта, а покажем только, как информация, доставляемая методом ПЕРТ, позволяет уменьшить полную стоимость проекта посредством воздействия на некритические операции.

Итак, рассмотрим некоторый проект (комплекс операций), где длительности операций выбраны так, что

$$d_{ij} \leq t_{ij} \leq D_{ij}. \quad (24.1)$$

Вычисление критического пути дает общую продолжительность реализации проекта. Полная стоимость проекта получается как сумма стоимостей всех операций

$$p = \sum_{(i,j) \in U} p_{ij}, \quad (24.2)$$

где $p_{ij}=0$, если $(i, j) \notin U$ (U обозначает множество дуг, составляющих сеть проекта).

Для уменьшения полной стоимости проекта *при той же самой общей продолжительности* его выполнения надо уменьшить свободные резервы некритических операций в пределах, установленных ограничениями (24.1). Действительно, уменьшение свободного резерва операции ведет к возрастанию ее длительности и, следовательно, к уменьшению стоимости. При этом может случиться, что возникнут новые критические пути. Так произойдет в том случае, если можно будет аннулировать свободные резервы всех операций, составляющих некоторый путь из E_1 в E_n .

Уточним все это, обратившись опять к примеру из параграфа 8 главы 2. Длительности операций t_{ij} теперь могут изменяться от D_{ij} до d_{ij} с возрастанием стоимости каждой из работ. Значения времен D_{ij} и d_{ij} приведены в таблице 24.1. Предположим, что *возрастание стоимости операций пропорционально уменьшению их длительности*. Это равносильно предположению, что кривые вида, изображенного на рис. (23.1), сводятся для каждой операции к прямолинейному отрезку. Коэффициенты пропорциональности c_{ij} приведены в таблице 24.1; эти коэффициенты представляют собой маргинальные стоимости операций. Мы умышленно взяли длительности операций t_{ij} , свободные резервы и стоимости p_{ij} , соответствующие не лучшему варианту плана реализации проекта. Исходный план представлен на рис. (24.1).

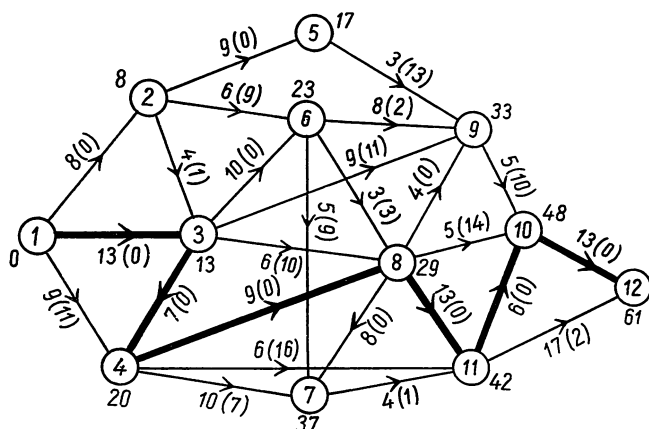
Числами в скобках показаны свободные резервы операций.

Таблица 24.1

P_{ij}	d_{ij}	D_{ij}	t_{ij}	свободный резерв M_{ij}	p_{ij} (во франках)	c_{ij}
P_{12}	7	10	8	0	6 000	100
P_{13}	12	15	13	0	20 000	1200
P_{14}	7	10	9	11	2 000	200
P_{23}	3	6	4	1	8 000	300
P_{25}	8	13	9	0	1 000	600
P_{26}	5	7	6	9	4 000	150
P_{34}	7	9	7	0	3 000	200
P_{36}	9	12	10	0	2 000	100
P_{38}	5	8	6	10	4 000	200
P_{39}	9	10	9	11	25 000	150
P_{47}	8	11	10	7	8 000	250
P_{48}	7	12	9	0	3 000	600
$P_{4,11}$	6	8	6	16	4 000	150
P_{59}	3	4	3	13	10 000	450
P_{67}	4	7	5	9	2 000	150
P_{68}	2	7	3	3	3 000	300
P_{69}	7	8	8	2	12 000	800
$P_{7,11}$	3	6	4	1	3 000	150
P_{87}	6	9	8	0	10 000	200
P_{89}	4	5	4	0	8 000	400
$P_{8,10}$	4	6	5	14	2 000	300
$P_{8,11}$	11	15	13	0	7 000	1000
$P_{9,10}$	4	6	5	10	3 000	400
$P_{10,12}$	10	14	13	0	6 000	900
$P_{11,10}$	5	8	6	0	2 000	300
$P_{11,12}$	15	18	17	2	2 000	500

Продолжительность реализации плана составляет 61 неделю, а его стоимость (т. е. стоимость выполнения проекта), получающаяся суммированием стоимостей операций, показанных в шестой колонке таблицы 24.1, равна 160 000 франков.

Этот план может быть сразу же улучшен путем увеличения длительностей некритических операций с учетом для каждой операции величин D_{ij} и соответствующих им свободных резервов.



Р и с. 24.1.

Свободный резерв операции P_{12} равен нулю, и мы не можем увеличить длительность этой операции. То же относится к P_{13} . Напротив, $M_{14}=11$, и мы можем увеличить t_{14} до 10 недель; $M_{23}=1$ и $D_{23}=6$; следовательно, t_{23} может быть увеличено до 5 недель; $M_{25}=0$ и операция P_{25} не может быть удлинена; $M_{26}=9$ и $D_{26}=7$, следовательно, t_{26} можно увеличить до 7 недель и т. д.

Новые длительности некритических операций будут равны

$t'_{12} = 8$	$t'_{25} = 9$	$t'_{48} = 9$	$t'_{68} = \underline{6}$	$t'_{9,10} = \underline{6}$
$t'_{13} = 13$	$t'_{26} = \underline{7}$	$t'_{4,11} = \underline{8}$	$t'_{69} = 8$	$t'_{10,12} = 13$
$t'_{14} = \underline{10}$	$t'_{34} = 7$	$t'_{59} = \underline{4}$	$t'_{7,11} = \underline{5}$	$t'_{11,10} = 6$
$t'_{23} = \underline{5}$	$t'_{36} = 10$	$t'_{67} = \underline{7}$	$t'_{87} = 8$	$t'_{11,12} = \underline{18}$
	$t'_{38} = \underline{8}$		$t'_{89} = 4$	
	$t'_{39} = \underline{10}$		$t'_{8,10} = \underline{6}$	
	$t'_{47} = \underline{11}$		$t'_{8,11} = 13$	

(Подчеркнуты длительности операций, не совпадающие с прежними.)

Сеть нового плана реализации проекта представлена на рис. (24.2). Здесь появились новые критические пути, хотя и не все свободные резервы использованы полностью. Критические пути суть

[1, 2, 3, 6, 8, 11, 10, 12]
 [1, 3, 6, 8, 11, 10, 12]
 [1, 2, 3, 4, 8, 11, 10, 12]
 [1, 3, 4, 8, 11, 10, 12]
 [1, 2, 3, 6, 8, 7, 11, 10, 12]
 [1, 3, 6, 8, 7, 11, 10, 12]
 [1, 2, 3, 4, 8, 7, 11, 10, 12]
 [1, 3, 4, 8, 7, 11, 10, 12].

Новые свободные резервы показаны на рис. (24.2) в скобках. Экономии на каждой операции можно подсчитать, взяв произведение c_{ij} на приращение длительности операции.

Реализованная экономия на $P_{14}=200$; на $P_{23}=300$; на $P_{26}=150$;

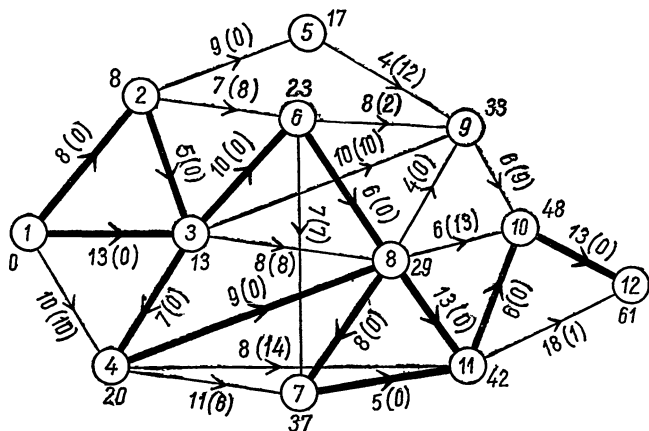


Рис. 24.2.

на $P_{38}=200 \times 2=400$; на $P_{39}=150$; на $P_{47}=250$; на $P_{4,11}=150 \times 2=300$; на $P_{59}=400$; на $P_{67}=150 \times 2=300$; на $P_{68}=300 \times 3=900$; на $P_{7,11}=150$; на $P_{8,10}=300$; на $P_{9,10}=400$; на $P_{11,12}=500$.

Полная экономия равна сумме средств, сэкономленных на каждой операции; она будет равна 4700 франков, а полная стоимость нового плана, соответствующего сети, изображенной на рис. (24.2), будет составлять

$$160\,000 - 4\,700 = 155\,300 \text{ франков.}$$

Не следует думать, что оптимум достигается при общей продолжительности выполнения проекта в 61 неделю. Предыдущее изложение имело целью показать только, как информация, получаемая в результате применения метода ПЕРТ, позволяет улучшить план, удлиняя, когда это возможно, некритические операции.

25. Ускорение реализации проекта (комплекса операций) при наименьших затратах¹

Для уменьшения общей продолжительности выполнения проекта нужно уменьшить длительность какой-нибудь критической операции. Общая продолжительность выполнения проекта уменьшится на такую же величину. Если мы выберем критическую операцию, которая *при одном и том же сокращении времени* приведет к *наименьшему возрастанию стоимости*, то мы ускорим выполнение проекта при наименьших затратах.

Здесь опять будет использован интуитивный и достаточно тривиальный метод. Цель этого параграфа, как и предыдущего, показать экономическое значение результатов метода ПЕРТ — критического пути и свободных резервов.

Предположим, например, что мы должны построить и оборудовать гидроэнергетический комплекс. В качестве единицы времени возьмем месяц. Различные операции, которые должны быть реализованы, сводятся к следующему:

- а) строительство подъездных дорог к местоположению плотины, к заводу и к карьерам по добыче стройматериалов (вероятная продолжительность $t_a=4$);
- б) подготовка карьеров к эксплуатации и закладка фундамента ($t_b=6$);
- с) строительство поселка для администрации и персонала ($t_c=4$);
- д) заказ оборудования для гидростанции (генераторы, турбины, напорный трубопровод и т. д. ...) ($t_d=12$);
- е) строительство завода ($t_e=10$);
- ф) строительство плотины, дамбы и водосброса ($t_f=24$);
- г) строительство галереи и подводящих трубопроводов ($t_g=7$);
- h) соединение завода и трубопроводов ($t_h=10$);
- и) предварительные испытания ($t_i=3$).

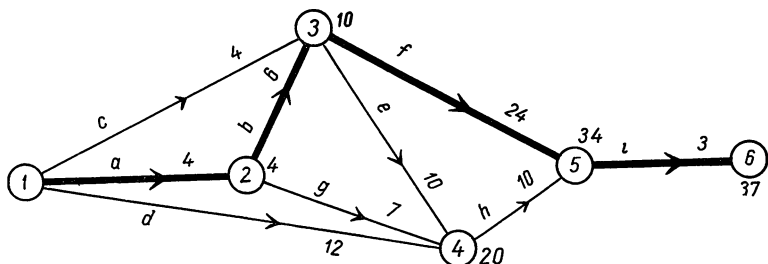
Сеть этого проекта представлена на рис. (25.1). События или этапы его следующие:

- 1) начало работ;

¹ Пример Ф. Охоа (F. Ochoa), гражданского инженера (университет в Мехико).

- 2) завершение строительства подъездных дорог;
- 3) постройка поселка и подготовка фундамента;
- 4) постройка завода и подводящих трубопроводов;
- 5) постройка энергетического комплекса;
- 6) сдача комплекса в эксплуатацию.

Предположим, что первоначальный план реализации проекта «нормален» и мы можем исходить из его стоимости, равной 350 млн. франков, распределение которой приведено в таб-



Р и с. 25.1.

лице 25.1. В этой таблице приведены также длительности и стоимости, соответствующие срочному плану проекта, где все операции сокращены до минимума, совместимого с техническими требованиями.

Таблица 25.1

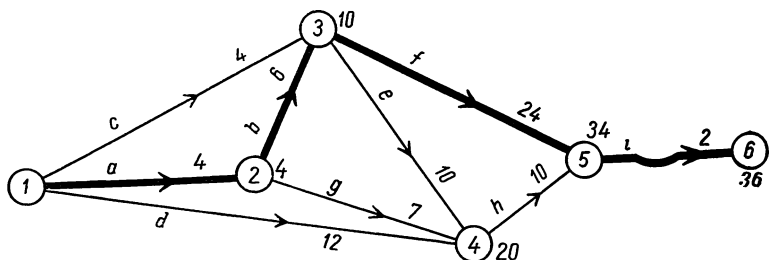
Операции	Нормальный план		Срочный план		Стоимость ускорения за месяц
	вероятная длительность (в мес.)	вероятная стоимость (млн. фр.)	вероятная длительность	вероятная стоимость	
<i>a</i>	4	5	2	15	5
<i>b</i>	6	11	5	30	19
<i>c</i>	4	3	2	11	4
<i>d</i>	12	150	9	180	10
<i>e</i>	10	10	8	20	5
<i>f</i>	24	147	19	212	13
<i>g</i>	7	18	6	30	12
<i>h</i>	10	4	7	25	7
<i>i</i>	3	2	2	5	3
		350		528	

Если мы хотим сократить общую продолжительность выполнения проекта на 9 месяцев, нужно обратиться прежде всего к критическим операциям, т. е. к операциям *a*, *b*, *f* и *i*.

При этом нет никакой необходимости в ускорении некрити-

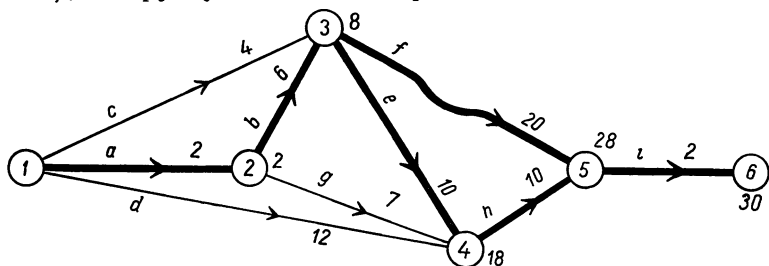
ческих операций; это будет бессмысленной тратой денег; американские авторы называют такого рода ошибочный выбор покупкой резервного времени («To buy floating time»).

Ясно, что сокращение на 1 месяц операции i обойдется наименее дорого (3 млн.), так как сокращение на месяц операций a , b и f обойдется соответственно в 5, 19 и 13 млн. франков. Итак, мы будем придерживаться этого решения, см. рис. (25.2).



Р и с. 25.2.

Пойдем дальше и попытаемся выиграть еще месяц. Теперь сократим на 1 месяц операцию a , имеющую наименьшую месячную стоимость после операции i (как это видно из таблицы 25.1), которую уже больше сокращать нельзя.



Р и с. 25.3.

Продолжая таким же образом, ускорим операцию a , затем операцию f так, как это показано в таблице 25.2.

После сокращения f с 21 до 20 месяцев появляются две новые критические операции — e и h (P_{34} и P_{45}), см. рис. (25.3).

Наконец, для того чтобы выиграть еще один месяц, т. е. сократить общую продолжительность с 30 до 29 месяцев, можно выбрать один из следующих двух путей:

выиграть	{	1 месяц на операции f :	стоимость . . . 13
		1 месяц на операции e :	стоимость . . . 5
		Всего	. . . 18
выиграть	{	1 месяц на операции b :	стоимость . . . 19
		Всего	. . . 19

Отсюда видно, что выгоднее сократить операции f и e . Выигрыш еще одного месяца обойдется в этом случае в 18 млн. франков.

В конечном итоге мы получим последовательность планов, приведенных в таблице 25.2.

Таблица 25.2

Продолжительность плана	Стоимость (млн. франков)	Длительность операций (месяцы)								
		a	b	c	d	e	f	g	h	i
37 мес.	350	4	6	4	12	10	24	7	10	3
36 »	353	4	6	4	12	10	24	7	10	2
35 »	358	3	6	4	12	10	24	7	10	2
34 »	363	2	6	4	12	10	24	7	10	2
33 »	376	2	6	4	12	10	23	7	10	2
32 »	389	2	6	4	12	10	22	7	10	2
31 »	402	2	6	4	12	10	21	7	10	2
30 »	415	2	6	4	12	10	20	7	10	2
29 »	433	2	6	4	12	9	19	7	10	2
28 »	452	2	5	4	12	9	19	7	10	2

26. Произвольный вид зависимости стоимости операций от ее длительности

В общем случае можно считать, что каждой операции соответствует кривая ее стоимости, как функции длительности, вида, изображенного на рис. (23.1). Длительность каждой операции изменяется между двумя пределами: между *нормальной длительностью* D_{ij} , соответствующей минимальной стоимости, и *срочной длительностью* d_{ij} .

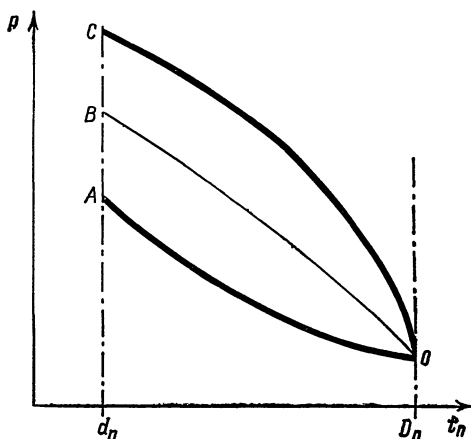
Если в плане реализации проекта для каждой операции будет взята ее нормальная длительность D_{ij} , соответствующая минимальной стоимости, мы получим «нормальный» план, стоимость которого будет минимальна. Его продолжительность обозначим через D_n , где n — индекс конечного события E_n .

Если для каждой операции взять ее ускоренную длительность d_{ij} , мы получим срочный план. Это не будет, вообще говоря, оптимальный план, т. е. имеющий минимальную стоимость (при данной продолжительности), т. е. его стоимость можно уменьшить, удлиняя не критические операции, как это было сделано в параграфе 24. Но продолжительность этого плана — минимальна. Обозначим ее через d_n , если E_n — конечное событие.

Для значений времени, расположенных между d_n и D_n , существует бесчисленное множество решений. Если мы представим полную стоимость p как функцию общей продолжительности плана реализации проекта, то все возможные кривые заполнят некоторую площадь $OABC$, где OA — кривая оптимальных решений. Это изображено на рис. (26.1).

В общем случае, когда зависимости стоимостей операций от их длительностей задаются произвольными функциями, методами исследования операций (по крайней мере в их современном состоянии) не представляется возможным определить кривую OA — кривую оптимальных решений.

Тем не менее метод, рассмотренный в параграфе 24, позволяет найти точку A . Исходя из плана, где все операции имеют



Р и с. 26.1.

длительности d_{ij} , мы можем уменьшать его стоимость, сокращая свободные резервы некритических операций в дозволенных пределах. На рис. (26.1) этот процесс может интерпретироваться как движение по вертикали CBA , проходящей через абсциссу d_n . Выходя из точки C , мы достигнем A , сократив до минимума свободные резервы некритических операций.

Исходя из плана, соответствующего точке O (длительности операций D_{ij}), мы можем уменьшать его продолжительность, сокращая произвольно выбранную (или выбранные) критическую операцию и повторяя шаг за шагом эту процедуру, не забывая о том, что могут возникнуть новые критические пути. При этом мы будем двигаться внутри фигуры OAB , представляющей множество всех возможных решений, за счет ускорения только критических работ. Это приближенное решение задачи может представлять интерес, если фигура OAB достаточно узкая

(сплюснутая). В этом случае можно построить и алгоритм, имея в виду применение вычислительной машины.

Если теперь на каждом этапе мы будем выбирать операцию (или несколько операций), которые при одном и том же сокращении времени будут давать наименьшее возрастание стоимости, как мы это делали в параграфе 25, то мы будем двигаться по кривой OA — кривой оптимальных решений. К сожалению, этот метод неприменим в общем случае, когда кривые стоимость—длительность произвольны или когда проект состоит из нескольких сотен операций. Он хорошо применим только тогда, когда сеть очень простая (десяток операций) или когда кривые $p_{ij} = f(t_{ij})$ имеют особый вид (параболы, прямые или выпуклые ломаные). Эти частные случаи будут рассмотрены в последующих параграфах.

27. Линейная зависимость стоимости от длительности. Задача параметрического линейного программирования

Предположим, что для каждой операции P_{ij} кривая $p_{ij} = f(t_{ij})$ зависимости стоимости операции от ее длительности представляет собою прямую, см. рис. (27.1), т. е.

$$p_{ij} = k_{ij} - c_{ij}t_{ij} \quad (27.1)$$

при условии

$$d_{ij} \leq t_{ij} \leq D_{ij}. \quad (27.2)$$

Рассмотрим некоторый проект с общей продолжительностью t_n и конечным событием E_n .

Поставим целью минимизировать полную стоимость этого проекта. Это приведет к задаче линейного программирования.

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{ij} \leq t_{ij} \leq D_{ij}, \\ \sum_{(ij) \in \mu} t_{ij} \leq t_n \text{ для всех } \mu \in \mu_n, \\ \text{MIN } \sum_{(ij) \in U} (k_{ij} - c_{ij}t_{ij}), \end{array} \right. \quad (27.3)$$

где μ_n — множество путей, соединяющих вершины 1 и n , а U — множество дуг, составляющих сеть проекта.

Рассматривая общую продолжительность проекта t_n как переменную величину и заменяя MIN на MAX, мы получим задачу параметрического линейного программирования, где $t_n = \lambda$ представляет собою изменяемый параметр.

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{ij} \leq t_{ij} \leq D_{ij}, \\ \sum_{(i,j) \in \mu} t_{ij} \leq \lambda \text{ для всех } \mu \in \mu_n, \\ \text{MAX} \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} t_{ij}. \end{array} \right. \quad (27.4)$$

В рассматриваемом частном случае кривая OA , изображенная на рис. (26.1), представляет собой выпуклую ломаную. Метод решения классических задач параметрического линейного программирования позволяет нам получить вершины этой ломаной, см. рис. (27.2).

Зная кривую OA — кривую оптимальных решений, руководство может выбрать план реализации проекта, наилучшим об-

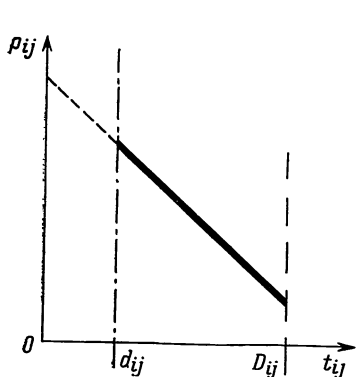


Рис. 27.1.

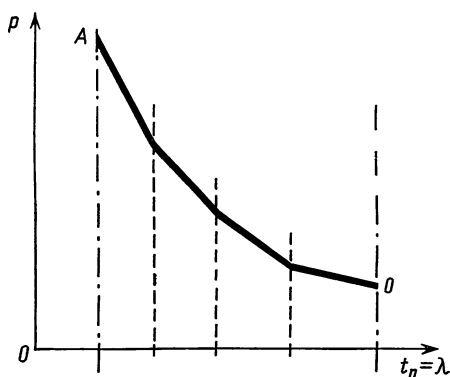


Рис. 27.2.

разом отвечающий его целям, сосредоточивая свое внимание или на общей продолжительности выполнения проекта, или на его полной стоимости.

Заметим, что метод, используемый в параметрическом линейном программировании, основан на тех же идеях, которые были вкратце изложены в параграфе 26.

Для задачи, которая нас интересует, — оптимизация плана реализации проекта — разработано много алгоритмов, учитывающих специфичную структуру данной задачи параметрического линейного программирования (27.4).

Это алгоритмы Келли [21] и [22] и Фулкерсона [23]. Эти алгоритмы почти эквивалентны, оба они исходят из задачи, двойственной к задаче (27.4).

В следующих параграфах мы дадим полное изложение алгоритма Фулкерсона.

28. Алгоритм Фулкерсона

Обозначая, как всегда, через t_i момент реализации события E_i , задачу (27.4) можно записать в форме

$$t_{ij} + t_i - t_j \leq 0 \text{ для всех } (i, j) \in U, \quad (28.1)$$

$$-t_1 + t_n \leq \lambda, \quad (28.2)$$

$$t_{ij} \leq D_{ij} \text{ для всех } (i, j) \in U, \quad (28.3)$$

$$-t_{ij} \leq -d_{ij} \text{ для всех } (i, j) \in U, \quad (28.4)$$

$$\text{MAX} \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} t_{ij}. \quad (28.5)$$

Полная стоимость проекта (комплекса операций)

$$p(\lambda) = \sum_{(i,j) \in U} k_{ij} - \max \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} t_{ij}. \quad (28.6)$$

Мы предположим, что вершины пронумерованы в соответствии с порядком слоев, которым они принадлежат (см. параграф 4).

Кривая $p(\lambda)$ есть кривая OA оптимальных решений, изображенная на рис. (26.1). Уравнение (28.1) выражает то, что между событиями E_i и E_j должно пройти время, достаточное для того, чтобы можно было выполнить операцию P_{ij} за t_{ij} единиц времени, а уравнение (28.2) означает, что общая продолжительность проекта не превосходит λ .

Рассмотрим задачу, двойственную к задаче (28.1—28.5). Если мы обозначим неотрицательные двойственные переменные, соответствующие ограничениям (28.1), (28.2), (28.3), (28.4), через f_{ij} , v , g_{ij} , h_{ij} , то двойственную задачу при фиксированном λ и $t_1 = 0$ можно записать в виде

$$f_{ij} + g_{ij} - h_{ij} = c_{ij} \text{ для всех } (i, j) \in U, \quad (28.7)$$

$$\sum_{(i,j) \in U_i^+} f_{ij} - \sum_{(i,j) \in U_i^-} f_{ji} = \begin{cases} 0 & i \neq 1, \quad i \neq n \\ -v & i = n \\ +v & i = 1, \end{cases} \quad (28.8)$$

$$\text{MIN} \left(\lambda v + \sum_{(i,j) \in U} D_{ij} g_{ij} - \sum_{(i,j) \in U} d_{ij} h_{ij} \right), \quad (28.9)$$

где U_i^+ есть подмножество дуг сети, исходящих из вершины i , а U_i^- — подмножество дуг, входящих в вершину i , см. рис. (28.1).

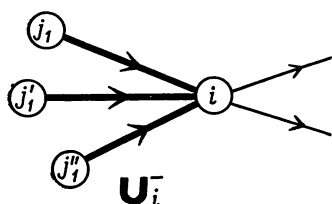
По крайней мере одна из величин g_{ij} и h_{ij} будет равна нулю в решении двойственной задачи и мы можем положить

$$g_{ij} = \max [0, c_{ij} - f_{ij}], \quad (28.10)$$

$$h_{ij} = \max [0, f_{ij} - c_{ij}]. \quad (28.11)$$

Тогда двойственная задача может быть сформулирована так: найти неотрицательные числа f_{ij} , по одному для каждой дуги сети, и неотрицательное число v , удовлетворяющие уравнениям (28.8) и минимизирующие линейную форму

$$\lambda v + \sum_{(ij) \in U} D_{ij} \max [0, c_{ij} - f_{ij}] - \sum_{(ij) \in U} d_{ij} \max [0, f_{ij} - c_{ij}]. \quad (28.12)$$



Р и с. 28.1.

Преобразуем переменные f_{ij} следующим образом: заменим каждую переменную f_{ij} на сумму двух неотрицательных переменных

$$f_{ij} = f_{ij;1} + f_{ij;2}, \quad (28.13)$$

подчиненных ограничениям

$$f_{ij;1} \leq c_{ij}, \quad (28.14)$$

$$f_{ij;2} < \infty. \quad (28.15)$$

Тогда в минимизируемой форме коэффициентом при $f_{ij;1}$ будет $(-D_{ij})$, а при $f_{ij;2}$ будет коэффициентом $(-d_{ij})$.

$$\lambda v + \sum_{(ij) \in U} D_{ij} c_{ij} - \sum_{(ij) \in U} D_{ij} f_{ij;1} - \sum_{(ij) \in U} d_{ij} f_{ij;2}.$$

Если мы положим

$$c_{ij;k} = \begin{cases} c_{ij} & k = 1, \\ \infty & k = 2; \end{cases} \quad (28.16)$$

$$d_{ij;k} = \begin{cases} D_{ij} & k = 1, \\ d_{ij} & k = 2, \end{cases} \quad (28.17)$$

то двойственную задачу, отбрасывая постоянные члены, можно записать в виде

$$\sum_k \sum_{(ij) \in U_i^+} f_{ij;k} - \sum_k \sum_{(ij) \in U_i^-} f_{ij;k} = \begin{cases} 0 & i \neq 1, i \neq n, \\ -v & i = n, \\ +v & i = 1, \end{cases} \quad (28.18)$$

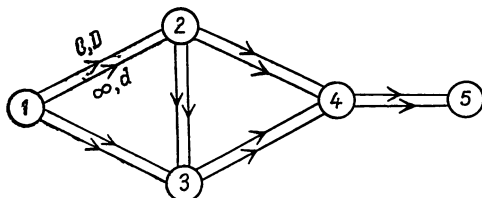
$$0 \leq f_{ij;k} \leq c_{ij;k}, \quad (28.19)$$

$$\text{MIN} \left(\lambda v - \sum_k \sum_{(ij) \in U} d_{ij;k} f_{ij;k} \right). \quad (28.20)$$

Это задача о потоке в сети; она получается из сети проекта удвоением всех ее дуг, см. рис. (28.2)¹.

Каждая дуга $(ij; k)$ этой новой сети имеет максимальную пропускную способность $c_{ij; k}$, и ей приписана стоимость $d_{ij; k}$.

Итак, мы пришли к задаче о максимальном потоке, критерий оптимальности которой дается выражением (28.20). Такого рода задачи являются предметом многочисленных исследований последних лет, и для их решения известны гораздо лучшие вычисленные методы, чем общие методы параметрического линейного программирования.



Р и с. 28.2.

Оптимальные длительности операций t_{ij} плана, соответствующие значениям t_i , получаемым в процессе решения, даются простой формулой

$$t_{ij} = \min [D_{ij}, t_j - t_i]. \quad (28.21)$$

Алгоритм: теоретическое рассмотрение

Основной процесс алгоритма Фулкерсона — это процесс индексации определенных вершин сети. В общем случае этот процесс состоит в систематическом отыскании цепи между 1 и n , имеющей определенные свойства. Слово «цепь» в отличие от «пути» означает, что некоторые дуги могут проходить в направлении, противоположном их ориентации. Иначе говоря, цепь есть последовательность неориентированных дуг².

¹ Эту новую сеть можно рассматривать как суперпозицию двух сетей, отличающихся различными значениями ограничений и стоимостей, приписываемых дугам.

Можно заметить, что обозначение в формулах (28.18) и (28.20) не вполне корректно, так как множество U разбито на два подмножества U_1 и U_2 . Для корректности нужно было бы записать (28.20) так:

$$\text{MIN} \left(\lambda v - \sum_{k=1}^2 \sum_{(ij) \in U_k} d_{ij; k} f_{ij; k} \right).$$

² Для справок, относящихся к терминологии теории графов, читатель может обратиться к работам, приведенным в библиографии под номерами [1] и [3].

Процесс индексации начинается при потоке $f_{ij;k}$ и временах t_i , удовлетворяющих условиям

$$t_1 = 0, \quad (28.22)$$

$$d_{ij;k} + t_i - t_j < 0 \Rightarrow f_{ij;k} = 0, \quad (28.23)$$

$$d_{ij;k} + t_i - t_j > 0 \Rightarrow f_{ij;k} = c_{ij;k}. \quad (28.24)$$

Для простоты примем следующее обозначение:

$$\bar{d}_{ij;k} = d_{ij;k} + t_i - t_j.$$

При $\lambda = t_n$ из этих условий вытекает, что поток f минимизирует (28.20). Это можно вывести из теоремы двойственности в линейном программировании или можно получить непосредственно, заметив, что

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_{(ij) \in U} \bar{d}_{ij;k} f_{ij;k} &= \sum_k \sum_{(ij) \in U} d_{ij;k} f_{ij;k} + \sum_k \sum_{(ij) \in U} [t_i - t_j] f_{ij;k} = \\ &= \sum_k \sum_{(ij) \in U} d_{ij;k} f_{ij;k} + [t_1 - t_n] v. \\ \sum_k \sum_{(ij) \in U} \bar{d}_{ij;k} f_{ij;k} &= \sum_k \sum_{(ij) \in U} d_{ij;k} f_{ij;k} - \lambda v. \end{aligned} \quad (28.25)$$

Условия (28.23) и (28.24) показывают, что f максимизирует левую часть равенства (28.25) и, следовательно, максимизирует и правую часть (28.25), т. е. минимизирует (28.20).

Процесс индексации заканчивается либо когда вершина l может быть отмечена, либо когда больше нельзя ставить индекс и вершина n не достигается.

Если вершина n отмечена, это означает, что мы нашли цепь между 1 и n , такую, что дугам, направленным от 1 к n , соответствует $\bar{d}_{ij;k} = 0$ и $f_{ij;k} < c_{ij;k}$, а противоположным дугам соответствует $\bar{d}_{ij;k} = 0$ и $f_{ij;k} > 0$. Тогда поток изменяется добавлением ε к дугам, направленным от 1 к n , и вычитанием ε из остальных.

Мы получим новый поток f' , для которого условия оптимальности (28.22) — (28.24) остаются справедливыми.

В случае, когда вершина n не достигается, времена наступления событий изменяются вычитанием δ из времени наступления событий, соответствующих неотмеченным вершинам. Это не изменяет $t_1 = 0$, но уменьшает $t_n = \lambda$ и определяет новые длительности операций по формуле (28.21). Величина δ выбирается так, чтобы новые времена событий t'_i и прежний поток f удовлетворяли всем условиям оптимальности (28.22) — (28.24).

Описанный процесс индексации разделяется на две части. В первой части мы ищем путь от 1 к n , составленный из дуг с бесконечной пропускной способностью (это соответствует $k=2$), таких, что $\bar{d}_{ij;k}=0$. Существование такого пути означает конец вычислений, так как новое уменьшение λ привело бы к нереализуемому плану; длительности операций этого пути сведены к минимуму. Если такой путь не существует, переходим ко второй части процесса индексации, которая описана выше.

Итеративная процедура начинается при нулевом потоке и временах t_i , удовлетворяющих условиям оптимальности (28.22) — (28.24). Эти времена соответствуют сети, в которой длительности операций равны D_{ij} , т. е. соответствуют точке O на рис. (26.1).

29. Полное описание итеративной процедуры алгоритма Фулкерсона

НАЧАЛО

Вычисляем $t_1, t_2, \dots, t_n$ с помощью итераций

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \\ t_j &= \max_i [t_i + \bar{d}_{ij;1}] = \\ &= \max_i [t_i + D_{ij}]. \end{aligned} \quad (29.1)$$

Полагаем

$$f_{ij;k} = 0. \quad (29.2)$$

ФАЗА А

Процесс индексации

1) ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

Вершине 1 приписываем индекс $[-, -, -, \varepsilon(1)=\infty]$. В общем случае рассматриваем отмеченную вершину i и ищем вершину j , такую, что $(i, j; 2)$ — дуга сети и

$$\bar{d}_{ij;2} = 0. \quad (29.3)$$

После этого отмечаем вершину j индексом $[i, 2, +, \varepsilon_j=\infty]$. Повторяем эту операцию шаг за шагом до тех пор, пока вершина n будет или отмечена или нет. В первом случае вычисления окончены. Во втором — переходим ко второй части.

2) ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Отмеченные ранее вершины сохраняют свои индексы, и процесс индексации продолжается следующим образом.

Рассматриваем отмеченную вершину i и ищем неотмеченную вершину j , такую, что либо $(i, j; k)$ — дуга сети, для которой

$$\bar{d}_{ij;k} = 0, f_{ij;k} < c_{ij;k}, \quad (29.4)$$

либо $(j, i; k)$ — дуга сети, для которой

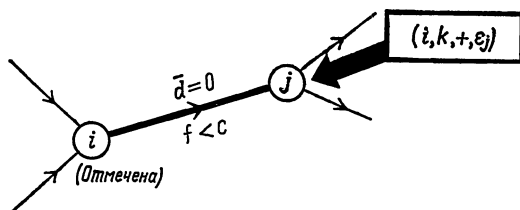
$$\bar{d}_{ji;k} = 0, f_{ji;k} > 0. \quad (29.5)$$

В первом случае (соотношения 29.4) вершине j приписывается индекс $[i, k, +, \varepsilon_j]$, где

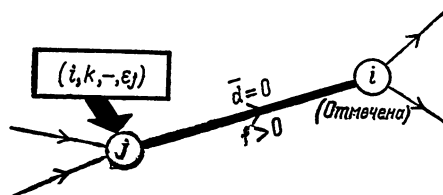
$$\varepsilon_j = \min [\varepsilon_i, (c_{ij;k} - f_{ij;k})]. \quad (29.6)$$

Во втором случае (соотношения 29.5) вершине j приписывается индекс $[i, k, -, \varepsilon_j]$, где

$$\varepsilon_j = \min [\varepsilon_i, f_{ji;k}]. \quad (29.7)$$



Р и с. 29.1.



Р и с. 29.2.

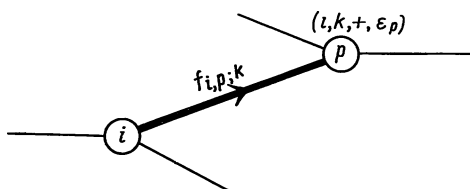
Повторяем эту операцию шаг за шагом. Если в этом процессе вершина n будет отмечена, переходим к фазе В; в противном случае переходим к фазе С.

Две возможности (29.4) и (29.5) представлены соответственно на рис. (29.1) и (29.2).

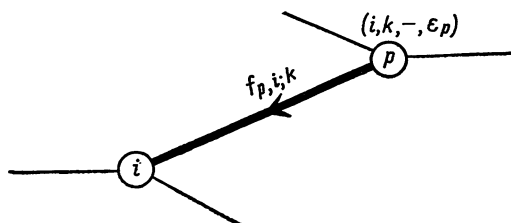
Изменение потока

Вершина n отмечена. Изменяем поток следующим образом. Пусть вершина n имеет индекс $[j, k, +, \varepsilon_n]$; тогда прибавляем ε_n к $f_{jn;k}$ и переходим к вершине j . Общая процедура такова: если вершина p отмечена индексом $[i, k, +, \varepsilon_p]$, прибавляем ε_n к $f_{ip;k}$; если вершина p отмечена индексом $[i, k, -, \varepsilon_p]$, вычитаем ε_n из $f_{pi;k}$; в обоих случаях переходим к вершине i .

Повторяем эту операцию до тех пор, когда будет достигнута вершина 1, т. е. до тех пор, когда ε_n будет прибавлено к дуге



Р и с. 29.3.



Р и с. 29.4.

$(1, j; k)$. После этого стираем все индексы и возвращаемся к фазе А.

Две возможности, рассмотренные здесь, представлены соответственно на рис. (29.3) и (29.4).

ФАЗА С

Изменение времен наступления событий

Вершина n не может быть отмечена. Выделим два множества дуг A_1 и A_2 :

$$A_1 = \{(i, j; k) \mid i \text{ отмечена, } j \text{ не отмечена, } \bar{d}_{ij;k} < 0\}, \quad (29.8)$$

$$A_2 = \{(i, j; k) \mid i \text{ не отмечена, } j \text{ отмечена, } \bar{d}_{ij;k} > 0\}. \quad (29.9)$$

Вычислим

$$\delta_1 = \min_{A_1} [-\bar{d}_{ij;k}] \quad (29.10)$$

и

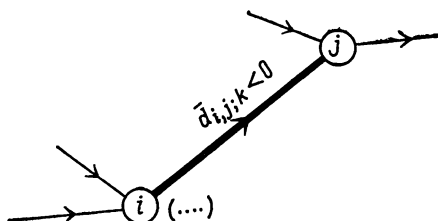
$$\delta_2 = \min_{A_2} [\bar{d}_{ij;k}]. \quad (29.11)$$

Полагаем

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \quad (29.12)$$

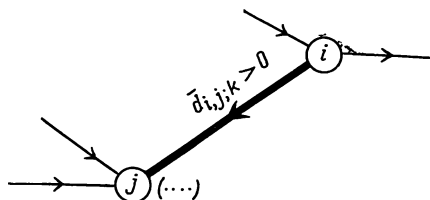
и изменяем времена t_i всех событий, соответствующих неотмеченным вершинам, уменьшив их на величину δ .

После этого стираем все индексы и возвращаемся к фазе А. Дуги множеств A_1 и A_2 представлены соответственно на рис.



Р и с. 29.5.

(29.5) и (29.6). В итоге алгоритм выдаст последовательные потоки и времена наступления событий, удовлетворяющие условиям (28.22) — (28.24). Кривая OA , геометрическое место опти-



Р и с. 29.6.

мальных решений, линейна между двумя последовательными значениями $\lambda = t_n$, получаемыми в результате применения алгоритма.

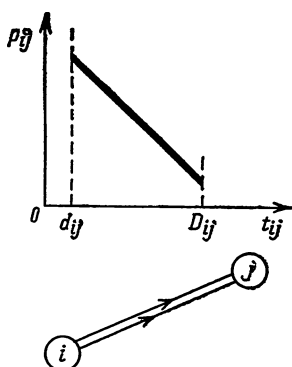
Полная стоимость проекта для каждого λ вычисляется по формуле

$$p(\lambda) = K - [\lambda v - \sum_k \sum_{(ij) \in U} d_{ij;k} f_{ij;k}], \quad (29.13)$$

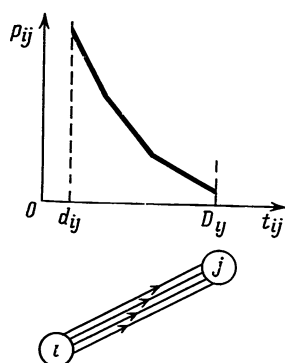
где K — константа, равная

$$K = \sum_{(ij) \in U} [k_{ij} - D_{ij} c_{ij}]. \quad (29.14)$$

Описанный метод обобщается на случай, когда кривые $p_{ij} = f(t_{ij})$ на интервале (d_{ij}, D_{ij}) не являются прямыми, см. рис. (29.7), а представляют собой выпуклые ломаные, состоящие из нескольких прямолинейных звеньев, см. рис. (29.8).



Р и с. 29.7.



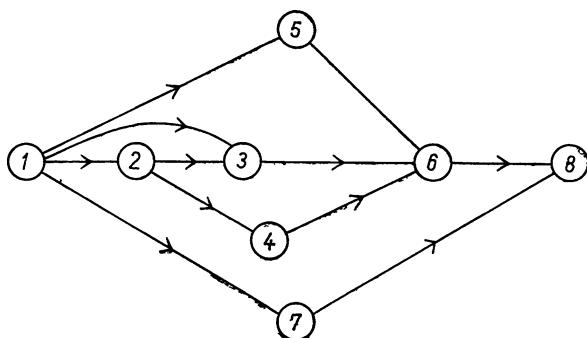
Р и с. 29.8.

Это достигается просто введением дополнительных дуг от вершины i к вершине j , по одной дуге на каждую точку излома кривой $p_{ij} = f(t_{ij})$, см. рис. (29.7) и (29.8).

30. Пример¹ применения алгоритма Фулкерсона

Простой пример позволит читателю ближе познакомиться с этим алгоритмом, теоретическое изложение которого может показаться очень сложным.

Рассмотрим проект, сеть которого изображена на рис. (30.1). В таблице 30.1 приведены значения d_{ij} , D_{ij} и c_{ij} .



Р и с. 30.1.

¹ Мы заимствовали этот пример из работы, приведенной в библиографии под номером [20], но вычисления ведутся здесь по алгоритму Фулкерсона.

t_{ij}	d_{ij}	D_{ij}	c_{ij}
t_{12}	11	20	1,00
t_{23}	30	50	1,50
t_{36}	32	52	3,00
t_{68}	6	8	5,00
t_{13}	12	36	4,66
t_{24}	21	27	6,00
t_{46}	25	50	1,00
t_{15}	33	36	1,00
t_{56}	60	80	2,00
t_{17}	12	22	1,30
t_{78}	50	90	2,00

Начало

Взяв D_{ij} в качестве длительностей операций, вычислим времена наступления событий, используя общий метод, приведенный в первой главе, формулы которого воспроизведены затем в (29.1). Поток положим равным нулю для всех дуг.

Эта сеть соответствует точке O на рис. (26.1).

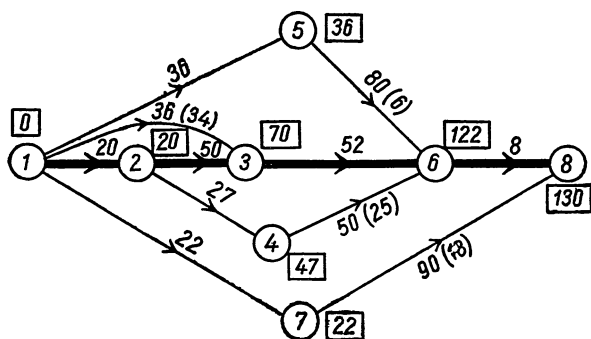


Рис. 30.2.

На рис. (30.2) времена наступления событий обведены рамками. Числа в скобках указывают свободные резервы операций. Видно, что $\lambda_1 = t_n = 130$.

Процесс индексации

1°. Чтобы приступить к индексации вершин, нужно сначала вычислить для каждой дуги величины

$$\bar{d}_{ij;1} = D_{ij} + t_i - t_j$$

и

$$\bar{d}_{ij;2} = d_{ij} + t_i - t_j.$$

Эти величины приводятся в таблице 30.2.

ФАЗА А

В столбце $\bar{d}_{ij;2}$ нет нулей, поэтому переходим прямо ко второй части процесса индексации и берем столбец $\bar{d}_{ij;1}$:

$$\bar{d}_{12;1} = 0 \quad \text{и} \quad f_{12;1} = 0 < c_{12;1} = 1, 0;$$

Таблица 30.2

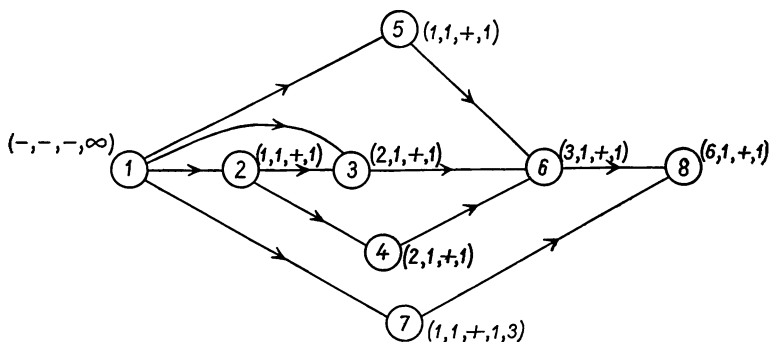
Операции	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij;1} = D_{ij} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij;2} = d_{ij} + t_i - t_j$
(1, 2)	0—20 = -20	20—20 = 0	11—20 = -9
(2, 3)	20—70 = -50	50—50 = 0	30—50 = -20
(3, 6)	70—122 = -52	52—52 = 0	32—52 = -20
(6, 8)	122—130 = -8	8—8 = 0	6—8 = -2
(1, 3)	0—70 = -70	36—70 = -34	12—70 = -58
(2, 4)	20—47 = -27	27—27 = 0	21—27 = -6
(4, 6)	47—122 = -75	50—75 = -25	25—75 = -50
(1, 5)	0—36 = -36	36—36 = 0	33—36 = -3
(5, 6)	36—122 = -86	80—86 = -6	60—86 = -26
(1, 7)	0—22 = -22	22—22 = 0	12—22 = -10
(7, 8)	22—130 = -108	90—108 = -18	50—108 = -58

присваиваем вершине 2 индекс [1, 1, +, 1]:

$$\bar{d}_{23;1} = 0 \quad \text{и} \quad f_{23;1} = 0 < c_{23;1} = 1, 50,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(3) &= \min [e_2, c_{23;1} - f_{23;1}] \\ &= \min [1, 1, 5] = 1; \end{aligned}$$

присваиваем вершине 3 индекс $[2, 1, +, 1]$ и т. д. Вершина 8 достигается и получает индекс $[6, 1, +, 1]$; см. рис. (30.3).



Р и с. 30.3.

ФАЗА В

Поток увеличивается на единицу и становится равным 1 для дуг

$(1, 2, 1)$

$(2, 3, 1)$

$(3, 6, 1)$

$(6, 8, 1),$

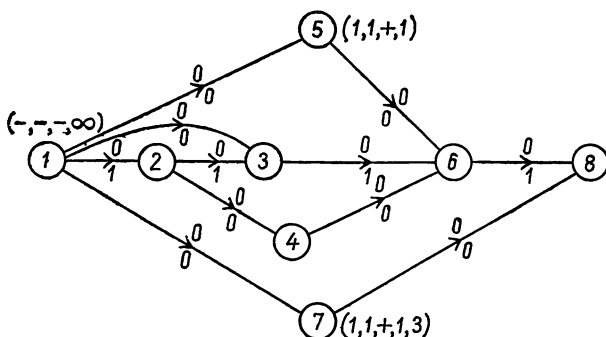
а для остальных дуг остается нулевым.

ФАЗА А

Вновь начинаем процесс индексации с новым потоком. На этот раз вершину 2 уже нельзя больше отметить, так как

$$f_{12;1} = 1 = c_{12;1}.$$

Можно отметить только две вершины 5 и 7: рис. (30.4). Оставив вершину 8 неотмеченной, переходим к фазе С.



Р и с. 30.4.

Множество A_2 пусто. Остается рассмотреть только множество A_1

$$-\bar{d}_{12;2} = 9,$$

$$-\bar{d}_{13;2} = 58, \quad -\bar{d}_{13;1} = 34,$$

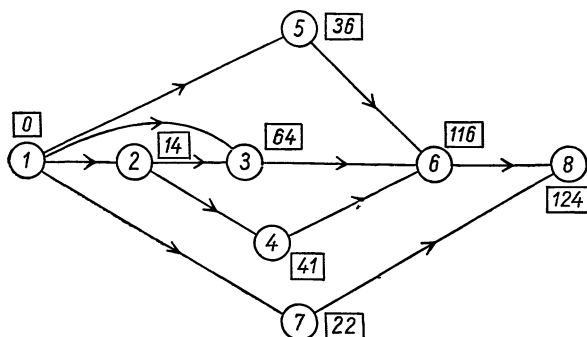
$$-\bar{d}_{56;2} = 26, \quad -\bar{d}_{56;1} = 6,$$

$$-\bar{d}_{78;2} = 58, \quad -\bar{d}_{78;1} = 18,$$

$$\delta_1 = \min_{A_1} [-\bar{d}_{ij;k}] = 6,$$

$$\delta = 6.$$

Отсюда получаем новые времена наступления неотмеченных событий: рис. (30.5a). Новые времена событий взяты в рамки. Поток на этом рисунке не показан.



Р и с. 30.5a

Вычислим теперь возрастание полной стоимости проекта. Согласно (29.13)

$$p(\lambda) = K - \left[\lambda v - \sum_{i,j,k} d_{ij;k} f_{ij;k} \right].$$

При $\lambda = 130$

$$p(130) = K, \text{ поскольку } f_{ij;k} = 0 \text{ при всех } i, j, k.$$

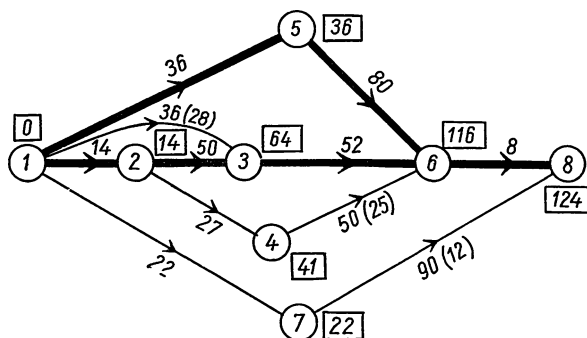
При $\lambda = 124$

$$p(124) = K - [124 - \underbrace{(20 + 50 + 52 + 8)}_{Z_{124}}] = K - (-6).$$

Следовательно, прирост полной стоимости $\Delta p = 6$.
Длительности операций вычисляются по формуле (28.21)

$$t_{ij} = \min [D_{ij}, (t_j - t_i)],$$

и сеть оптимального плана реализации проекта для $t_8 = \lambda = 124$ приведена на рис. (30.5b).



Р и с. 30.5b.

Числа в рамках — времена наступления событий.

Числа, выписанные около дуг, — длительности операций.

Числа в скобках — свободные резервы операций.

P_{13} имеет свободный резерв 28; P_{46} — 25 и P_{78} — 12.

Имеется два критических пути: [1, 2, 3, 6, 8] и [1, 5, 6, 8].

2°. Прежде чем переходить к фазе А, необходимо составить новую таблицу, аналогичную таблице (30.2), исходя из вычисленных времен наступления событий.

Таблица 30.3

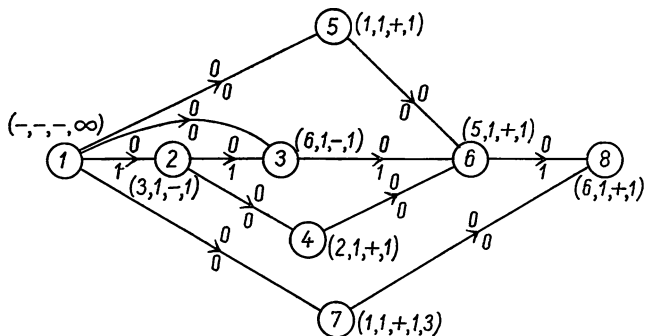
Операции	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij}; 1 = D_{ij} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij}; 2 = d_{ij} + t_i - t_j$
(1,2)	0 — 14 = -14	20 — 14 = 6	11 — 14 = -3
(2,3)	14 — 64 = -50	50 — 50 = 0	30 — 50 = -20
(3,6)	64 — 116 = -52	52 — 52 = 0	32 — 52 = -20
(6,8)	116 — 124 = -8	8 — 8 = 0	6 — 8 = -2
(1,3)	0 — 64 = -64	36 — 64 = -28	12 — 64 = -52
(2,4)	14 — 41 = -27	27 — 27 = 0	21 — 27 = -6
(4,6)	41 — 116 = -75	50 — 75 = -25	25 — 75 = -50
(1,5)	0 — 36 = -36	36 — 36 = 0	33 — 36 = -3
(5,6)	36 — 116 = -80	80 — 80 = 0	60 — 80 = -20
(1,7)	0 — 22 = -22	22 — 22 = 0	12 — 22 = -10
(7,8)	22 — 124 = -102	90 — 102 = -12	50 — 102 = -52

В столбце $\bar{d}_{ij;2}$ нет нулей, поэтому переходим прямо ко второй части процесса индексации и берем столбец $\bar{d}_{ij;1}$

$$\bar{d}_{15;1} = 0 \text{ и } f_{15;1} = 0 < c_{15;1} = c_{15} = 1,00.$$

Следовательно, вершина 5 получает индекс $[1, 1, +, 1]$. Аналогично вершина 6 получает индекс $[5, 1, +, 1]$. Правило (29.5) позволяет отметить вершины 3, 2 и т. д.

Получаем сеть, приведенную на рис. (30.6).

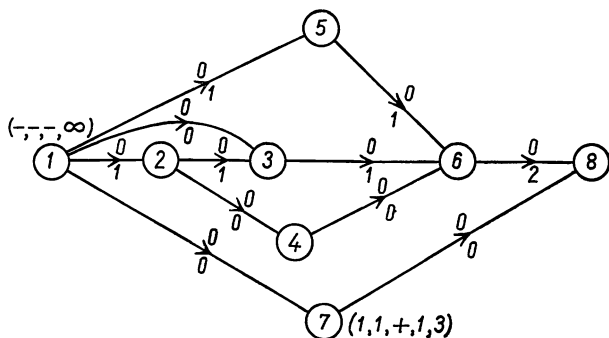


Р и с. 30.6.

Так как вершина 8 отмечена, можно перейти к фазе В и увеличить поток.

ФАЗА В

Поток увеличивается на единицу для дуг $(6, 8; 1)$, $(5, 6; 1)$ и $(1, 5; 1)$. Для остальных дуг он остается неизменным.



Р и с. 30.7.

ФАЗА А

Вновь начинаем процесс индексации с новым потоком. Теперь уже нельзя больше отметить вершину 5, так как хотя $\bar{d}_{15;1}=0$, но

$$f_{15;1} = c_{15;1} = c_{15} = 1.$$

Можно отметить только одну вершину 7, см. рис. (30.7). Оставив вершину 8 неотмеченной, переходим к фазе С.

ФАЗА С

Множество A_2 пусто. Остается рассмотреть только множество A_1

$$-\bar{d}_{12;2} = 3,$$

$$-\bar{d}_{13;2} = 52, \quad -\bar{d}_{13;1} = 28,$$

$$-\bar{d}_{15;2} = 3,$$

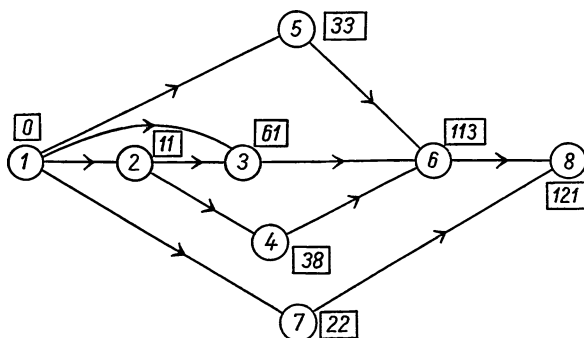
$$-\bar{d}_{78;2} = 52, \quad -\bar{d}_{78;1} = 12,$$

$$\delta_1 = \min_{A_1} [-\bar{d}_{ij;k}] = 3,$$

$$\delta = 3.$$

Отсюда получаем новые времена наступления событий, не отмеченных на предыдущем рисунке.

На рис. (30.8а) новые времена наступления событий взяты в рамки.



Р и с. 30.8а.

Поток на этом рисунке не указан.

Увеличение полной стоимости Δp по отношению к p ($\lambda=130$) запишем так:

$$-\Delta p = 2 \times 121 - Z_{124} - 1 \times 124,$$

что дает

$$-\Delta p = 2 \times 121 - [20 + 50 + 52 + (2 \times 8)] - (36 + 80) = \\ = 2 \times 121 - (20 + 50 + 52 + 8) - (36 + 80 + 8).$$

Z_{124} — это величина $(20 + 50 + 52 + 8)$, которая встретилась нам при вычислении Δp для $\lambda = 124$.

Итак,

$$-\Delta p = 242 - Z_{124} - 124 = 242 - 130 - 124 = 242 - 254,$$

$$\Delta p = 12, Z_{121} = 254.$$

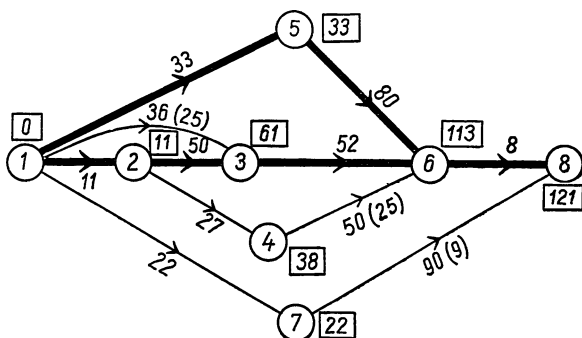
Прирост стоимости по отношению к p ($\lambda = 124$) составит

$$\Delta' p = 12 - 6 = 6.$$

Длительности операций вычисляются по формуле (28.21)

$$t_{ij} = \min [D_{ij}, (t_j - t_i)].$$

Сеть оптимального плана для $t_8 = \lambda = 121$ приведена на рис. (30.8b).



Р и с. 30.8b.

Числа в рамках — времена наступления событий.

Числа, выписанные около дуг, — длительности операций.

Числа в скобках — свободные резервы времени соответствующих операций.

P_{13} и P_{46} имеют свободный резерв 25.

Свободный резерв P_{78} равен 9.

Имеется два критических пути $[1, 2, 3, 6, 8]$ и $[1, 5, 6, 8]$.

3°. Прежде чем переходить к фазе А, нужно составить новую таблицу, аналогичную таблице 30.2, исходя из вычисленных времен наступления событий.

Операции	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij}; 1 = D_{ij} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij}; 2 = d_{ij} + t_i - t_j$
(1,2)	0—11=—11	20—11=9	11—11=0
(2,3)	11—61=—50	50—50=0	30—50=—20
(3,6)	61—113=—52	52—52=0	32—52=—20
(6,8)	113—121=—8	8—8=0	6—8=—2
(1,3)	0—61=—61	36—61=—25	12—61=—49
(2,4)	11—38=—27	27—27=0	21—27=—6
(4,6)	38—113=—75	50—75=—25	25—75=—50
(1,5)	0—33=—33	36—33=3	33—33=0
(5,6)	33—113=—80	80—80=0	60—80=—20
(1,7)	0—22=—22	22—22=0	12—22=—10
(7,8)	22—121=—99	90—99=—9	50—99=—49

ФАЗА А

Теперь в столбце $\bar{d}_{ij}; 2$ появились два нуля. Вершины 5 и 2 получают индекс $[1, 2, +, \infty]$.

$$\bar{d}_{23;1} = 0, f_{23;1} = 1 < c_{23;1} = 1,50,$$

поэтому вершина 3 получает индекс $[2, 1, +, 0,50]$. Аналогично вершина 6 получает индекс $[3, 1, +, 0,50]$ и т. д.

Получаем сеть, изображенную на рис. (30.9).

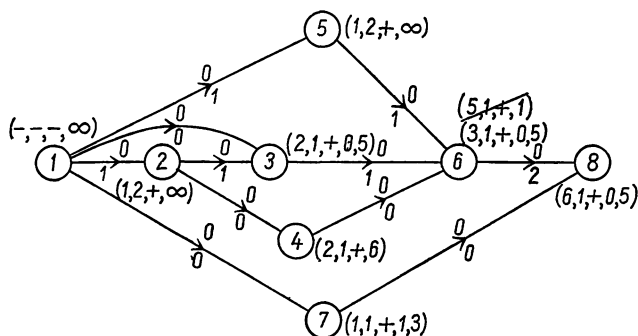


Рис. 30.9.

Вершина 6 имеет два индекса, полученные исходя из вершин 5 и 3.

В этом случае выбирается один из них, а другой (или другие) — стирается.

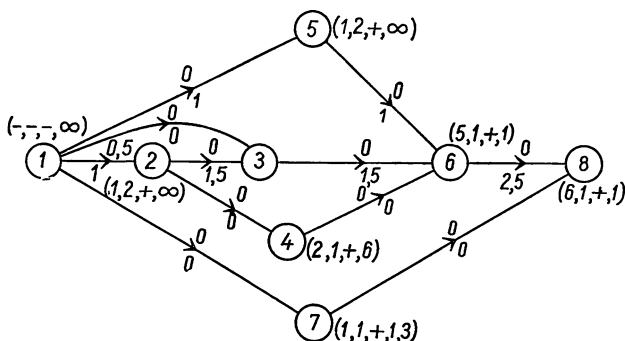
Здесь мы сохраним за вершиной 6 индекс $[3, 1, +, 0,50]$. Вершина 8 отмечена. Следовательно, теперь можно перейти к фазе *В* и увеличить поток.

ФАЗА В

Поток увеличивается на 0,50 для дуг $(6, 8; 1)$, $(3, 6; 1)$, $(2, 3; 1)$ и $(1, 2; 2)$. Обратим внимание на дугу $(1, 2; 2)$, так как вершина 2 имеет индекс $[1, 2, +, \infty]$. Мы знаем, что в действительности дуги на предыдущих рисунках удвоены, как это показано на рис. (28.2), хотя на остальных рисунках это не изображено. Поток дуг $(i, j; 2)$ будет в дальнейшем выписываться на рисунках *над* дугами.

ФАЗА А

Вновь начинаем процесс индексации с новым потоком. Вершина 6 получает индекс $[5, 1, +, 1]$, вершина 8 — индекс $[6, 1, +, 1]$. Полученная сеть изображена на рис. (30.10).



Р и с. 30.10.

Можно перейти к фазе *В* и увеличить поток.

ФАЗА В

Поток увеличивается на 1 для дуг $(6, 8; 1)$, $(5, 6; 1)$ и $(1, 5; 2)$.

ФАЗА А

Вновь начинаем процесс индексации с новым потоком. Вершину 6 теперь нельзя отметить, так как хотя $\bar{d}_{56;1} = 0$, но

$$f_{56;1} = c_{56;1} = c_{56} = 2,00.$$

Отмеченные вершины указаны на рис. (30.11).

Поскольку вершина 8 осталась неотмеченной, переходим к фазе С.

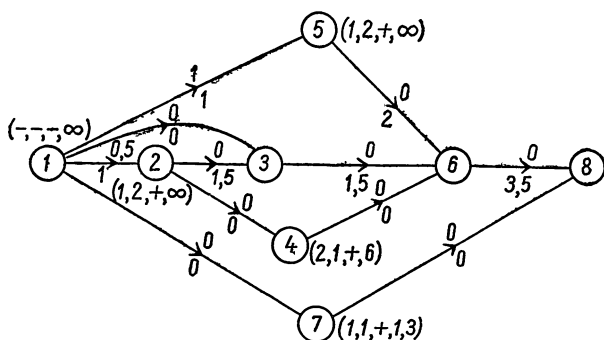


Рис. 30.11.

ФАЗА С

Множество A_2 пусто, так как нет дуг $(i, j; k)$, где i не отмечена, а j отмечена. На множестве A_1

$$-\bar{d}_{13;2} = 49, \quad -\bar{d}_{13;1} = 25,$$

$$-\bar{d}_{23;2} = 20,$$

$$-\bar{d}_{56;2} = 20,$$

$$-\bar{d}_{46;2} = 50, \quad -\bar{d}_{46;1} = 25,$$

$$-\bar{d}_{78;2} = 49, \quad -\bar{d}_{78;1} = 9,$$

$$\delta_1 = \min_{A_1} [-\bar{d}_{ij;k}] = 9,$$

$$\delta = 9.$$

Отсюда новые времена наступления событий, не отмеченных на предыдущем рисунке. На рис. (30.12a) времена наступления событий взяты в рамки.

Поток на этом рисунке не указан.

Прирост стоимости по отношению к p ($\lambda=130$)

$$-\Delta p = 3,50 \times 112 - Z_{121} - 1,50 \times 121.$$

3,50 — поток, приходящий в 8.

1,50 — возрастание потока по отношению к тому, который был при $\lambda=121$.

$$Z_{121} = 254 = 130 + 124.$$

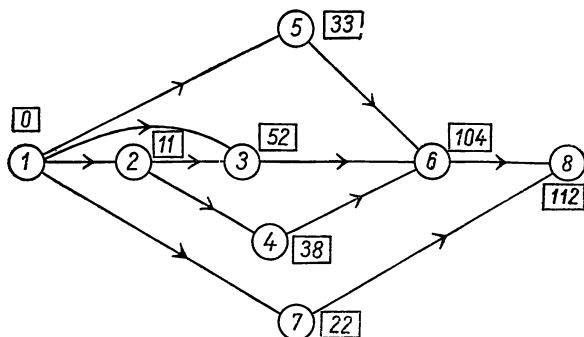
Итак,

$$-\Delta p = 392 - 254 - 181,5 = 392 - 435,5 = -43,5,$$

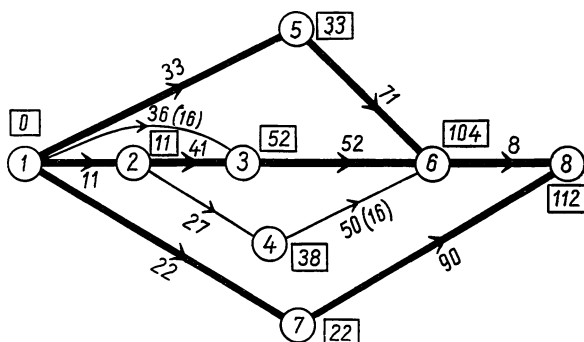
$$\Delta p = 43,5, \quad Z_{112} = 435,5.$$

Прирост стоимости по отношению к p ($\lambda=121$)

$$\Delta'_p = 43,5 - 12 = 31,5.$$



Р и с. 30.12а.



Р и с. 30.12b.

Длительности операций вычисляются по формуле (28.21).

$$t_{ij} = \min[D_{ij}, (t_j - t_i)].$$

Сеть оптимального плана для $t_8 = \lambda = 112$ приведена на рис. (30.12b).

Числа в рамках — времена наступления событий.

Числа, выписанные около дуг, — длительности операций.

Числа в скобках — свободные резервы операций.

P_{13} и P_{46} имеют свободный резерв 16.

Имеется три критических пути (1, 2, 3, 6, 8), (1, 5, 6, 8) и (1, 7, 8).

4°. Прежде чем переходить к фазе А, нужно составить новую таблицу, аналогичную таблице 30.2, исходя из вычисленных времен наступления событий.

Таблица 30.5

Операции	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij}; 1 = D_{ij} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij}; 2 = d_{ij} + t_i - t_j$
(1, 2)	0 — 11 = -11	20 — 11 = 9	11 — 11 = 0
(2, 3)	11 — 52 = -41	50 — 41 = 9	30 — 41 = -11
(3, 6)	52 — 104 = -52	52 — 52 = 0	32 — 52 = -20
(6, 8)	104 — 112 = -8	8 — 8 = 0	6 — 8 = -2
(1, 3)	0 — 52 = -52	36 — 52 = -16	12 — 52 = -40
(2, 4)	11 — 38 = -27	27 — 27 = 0	21 — 27 = -6
(4, 6)	38 — 104 = -66	50 — 66 = -16	25 — 66 = -41
(1, 5)	0 — 33 = -33	36 — 33 = 3	33 — 33 = 0
(5, 6)	33 — 104 = -71	80 — 71 = 9	60 — 71 = -11
(1, 7)	0 — 22 = -22	22 — 22 = 0	21 — 22 = -10
(7, 8)	22 — 112 = -90	90 — 90 = 0	50 — 90 = -40

ФАЗА А

В столбце $\bar{d}_{ij;2}$ есть два нуля. Вершины 5 и 2 получают индекс [1, 2, +, ∞].

$$\bar{d}_{17;1} = 0 \text{ и } f_{17;1} = 0 < c_{17;1} = c_{17} = 1,30,$$

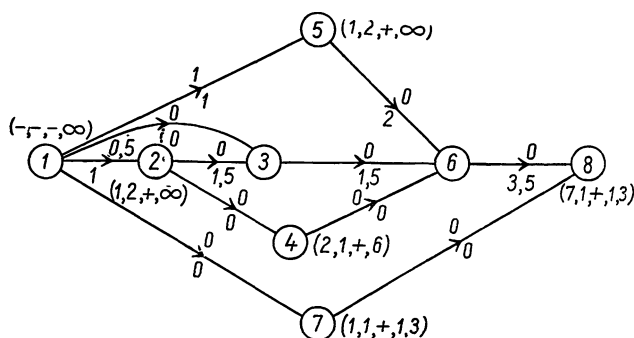


Рис. 30.13.

поэтому вершине 7 присваивается индекс [1, 1, +, 1,30]. Вершине 8 присваивается индекс [7, 1, +, 1,30]. Получаем сеть, изображенную на рис. (30.13).

После того, как вершина 8 отмечена, можно перейти к фазе *B* и увеличить поток.

ФАЗА *B*

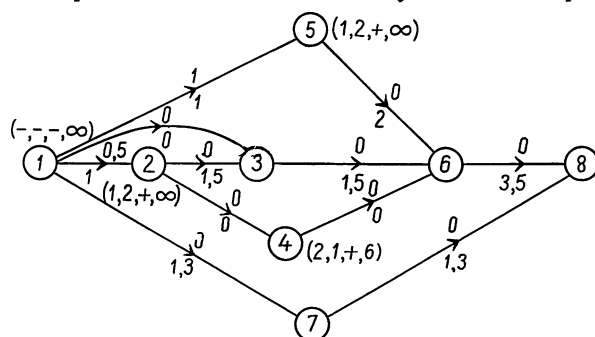
Поток увеличивается на 1,3 для дуг $(7, 8; 1)$ и $(1, 7; 1)$. В остальных местах он остается неизменным.

ФАЗА *A*

Вновь начинаем процесс индексации с этим новым потоком. Вершину 7 теперь нельзя отметить, так как хотя $\bar{d}_{17;1} = 0$, но

$$f_{17;1} = c_{17;1} = c_{17} = 1,3.$$

Отмеченные вершины и новые потоки указаны на рис. (30.14).



Р и с. 30.14.

Так как вершина 8 осталась неотмеченной, переходим к фазе *C*.

ФАЗА *C*

Множество A_2 пусто. На множестве A_1

$$-\bar{d}_{13;2} = 40, \quad -\bar{d}_{13;1} = 16,$$

$$-\bar{d}_{17;2} = 10,$$

$$-\bar{d}_{23;2} = 11,$$

$$-\bar{d}_{56;2} = 11,$$

$$-\bar{d}_{46;2} = 41, \quad -\bar{d}_{46;1} = 16,$$

$$\delta_1 = \min_{A_1} [-\bar{d}_{ij;k}] = 10,$$

$$\delta = 10.$$

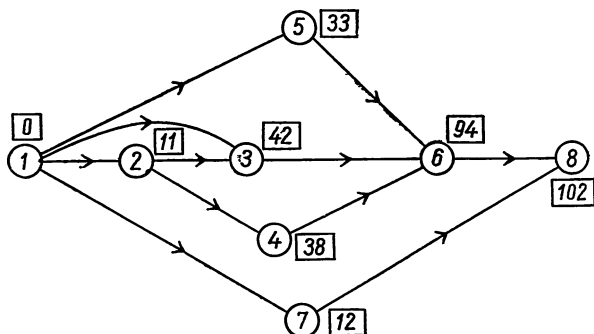
Отсюда получаем новые времена наступления событий, не отмеченных на предыдущем рисунке. На рис. (30.15a) новые времена наступления событий заключены в рамки.

Поток на этом рисунке не указан.

Прирост полной стоимости по отношению к p ($\lambda=130$) равен

$$-\Delta p = 4,80 \times 102 - Z_{112} - 1,30 \times 112,$$

где 4,80 — полный поток, приходящий в вершину 8, см. рис. (30.14).



Р и с. 30.15a.

1,30 — возрастание потока по отношению к тому, который был при $\lambda=112$ и $Z_{112}=435,5$.

$$-\Delta p = 489,6 - 435,5 - 145,6 = 489,6 - 581,1,$$

$$Z_{102} = 581,1.$$

$$\Delta p = 91,5.$$

Прирост стоимости по отношению к p ($\lambda=112$) равен

$$\Delta'_p = 91,5 - 43,5 = 48.$$

Длительности операций вычисляются по формуле (28.21).

$$t_{ij} = \min [D_{ij}, (t_j - t_i)].$$

Сеть оптимального плана для $t_8=\lambda=102$ представлена на рис. (30.15b).

Числа в рамках — времена наступления событий.

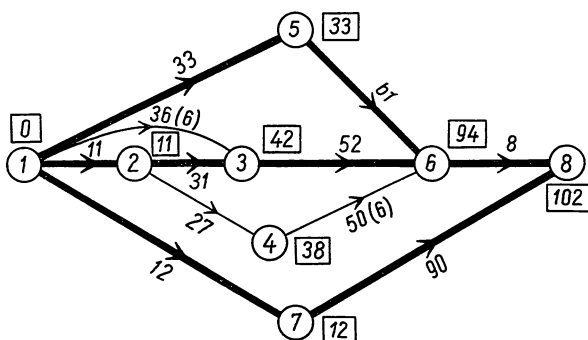
Числа, выписанные около дуг, — длительности операций.

Числа в скобках — свободные резервы времени операций.

P_{13} и P_{46} имеют свободный резерв 6.

Имеется три критических пути [1, 2, 3, 6, 8], [1, 5, 6, 8], [1, 7, 8].

5°. Прежде чем переходить к фазе А, нужно составить



Р и с. 30.15b.

новую таблицу, аналогичную таблице 30.2, исходя из вычисленных времен наступления событий.

Таблица 30.6

Опера- ции	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij}; 1 = D_{ij} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij}; 2 = d_{ij} + t_i - t_j$
(1,2)	0—11=—11	20—11=9	11—11=0
(2,3)	11—42=—31	50—31=19	30—31=—1
(3,6)	42—94=—52	52—52=0	32—52=—20
(6,8)	94—102=—8	8—8=0	6—8=—2
(1,3)	0—42=—42	36—42=—6	12—42=—30
(2,4)	11—38=—27	27—27=0	21—27=—6
(4,6)	38—94=—56	50—56=—6	25—56=—31
(1,5)	0—33=—33	36—33=3	33—33=0
(5,6)	33—94=—61	80—61=19	60—61=—1
(1,7)	0—12=—12	22—12=10	12—12=0
(7,8)	12—102=—90	90—90=0	50—90=—40

ФАЗА А

Теперь в столбце $\bar{d}_{ij;2}$ имеется три нуля. Вершины 5, 2, 7 получают индекс $[1, 2, +, \infty]$.

$$\bar{d}_{78;1} = 0 \quad \text{и} \quad f_{78;1} = 1,30 < c_{78;1} = c_{78} = 2,00.$$

Следовательно, вершина 8 получает индекс $[7, 1, +, 0,70]$, см. рис. (30.16).

Теперь можно перейти к фазе В и увеличить поток.

ФАЗА В

Поток увеличивается на 0,70 для дуг $(7, 8; 1)$ и $(1, 7; 2)$. В остальных местах он остается неизменным.

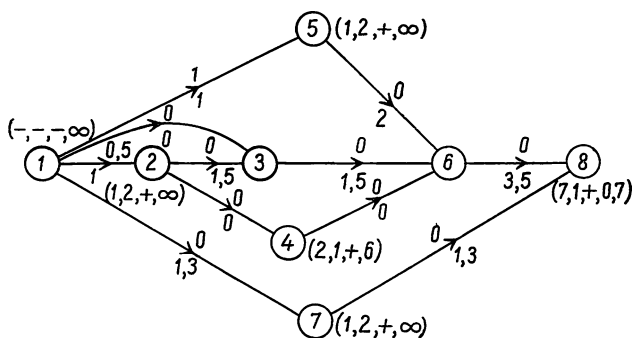


Рис. 30.16.

Фаза А

Вновь начинаем процесс индексации с новым потоком. Теперь нельзя отметить вершину 8, так как

$$f_{78;1} = c_{78;1} = c_{78} = 2,00.$$

Отмеченные вершины и новые потоки указаны на рис. (30.17). Так как вершина 8 осталась неотмеченной, переходим к фазе С.

Фаза С

Множество A_2 пусто. На множестве A_1

$$- \bar{d}_{13;2} = 30, \quad - \bar{d}_{13;1} = 6,$$

$$- \bar{d}_{23;2} = 1,$$

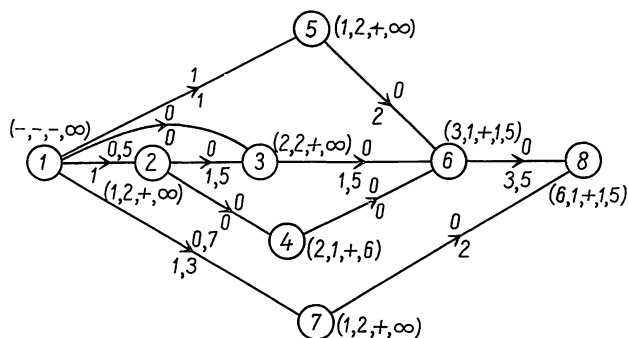
$$-\bar{d}_{46;2} = 31, \quad -\bar{d}_{46;1} = 6,$$

$$-\bar{d}_{56;2} = 1,$$

$$-\bar{d}_{78;2} = 40,$$

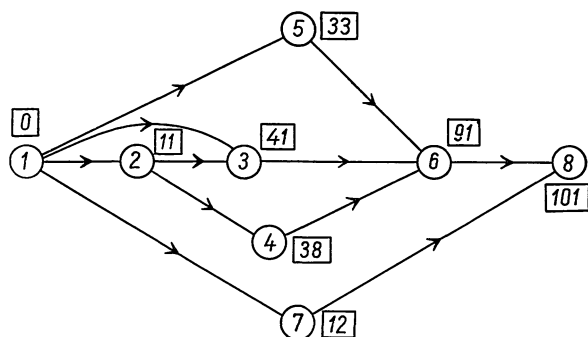
$$\delta_1 = \min_{A_1} [-\bar{d}_{ij;k}] = 1,$$

$$\delta = 1.$$



Р и с. 30.17.

Отсюда новые времена наступления событий, не отмеченных на предыдущем рисунке. На рис. (30.18а) времена наступления событий заключены в рамки.



Р и с. 30.18а.

Поток на этом рисунке не указан.

Прирост полной стоимости по отношению к p ($\lambda=130$) равен

$$-\Delta p = 5,50 \times 101 - Z_{103} - 0,70 \times 102,$$

где 5,50 — полный поток, приходящий в 8, см. рис. (30.17).

0,70 — возрастание потока по отношению к тому, который был при $\lambda=102$ и $Z_{102}=581,1$.

$$-\Delta p = 555,5 - 581,1 - 71,4 = 555,5 - 652,5,$$

$$Z_{101} = 652,5,$$

$$\Delta p = 97,0.$$

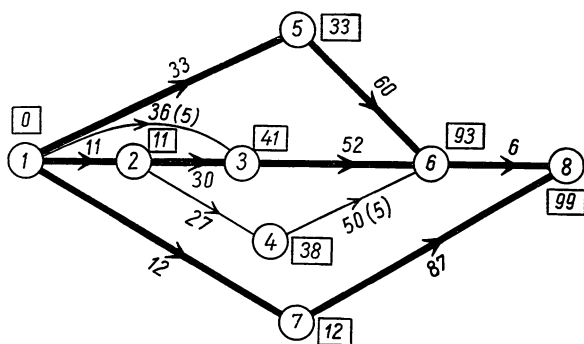
Прирост стоимости по отношению к p ($\lambda=102$) равен

$$\Delta'_p = 97,0 - 91,5 = 5,50.$$

Длительности операций вычисляются по формуле (28.21)

$$t_{ij} = \min [D_{ij}, (t_j - t_i)].$$

Сеть оптимального плана для $t_8=\lambda=101$ представлена на рис. (30.18b).



Р и с. 30.18b.

P_{13} и P_{46} имеют свободный резерв 5.

Имеется три критических пути:

$$[1, 2, 3, 6, 8], [1, 5, 6, 8], [1, 7, 8].$$

6°. Прежде чем переходить к фазе А, надо составить новую таблицу, аналогичную таблице 30.2, исходя из вычисленных времен наступления событий.

Опера- ции	$t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij}; 1 = D_{ij} + t_i - t_j$	$\bar{d}_{ij}; 2 = d_{ij} + t_i - t_j$
(1,2)	0—11=—11	20—11=9	11—11=0
(2,3)	11—41=—30	50—30=20	30—30=0
(3,6)	41—93=—52	52—52=0	32—52=—20
(6,8)	93—101=—8	8—8=0	6—8=—2
(1,3)	0—41=—41	36—41=—5	12—41=—29
(2,4)	11—38=—27	27—27=0	21—27=—6
(4,6)	38—93=—55	50—55=—5	25—55=—30
(1,5)	0—33=—33	36—33=3	33—33=0
(5,6)	33—93=—60	80—60=20	60—60=0
(1,7)	0—12=—12	22—12=10	12—12=0
(7,8)	12—101=—89	90—89=1	50—89=—39

ФАЗА А

В столбце $\bar{d}_{ij}; 2$ имеется пять нулей. Вершины 2, 5, 7 получают индекс $[1, 2, +, \infty]$, вершина 3 — индекс $[2, 2, +, \infty]$, вершина 6 — индекс $[5, 2, +, \infty]$.

$$\bar{d}_{36}; 1 = 0 \quad \text{и} \quad f_{36}; 1 = 1,50 < c_{36}; 1 = c_{36} = 3,00.$$

Следовательно, вершине 6 присваивается индекс $[3, 1, +, 1,50]$.

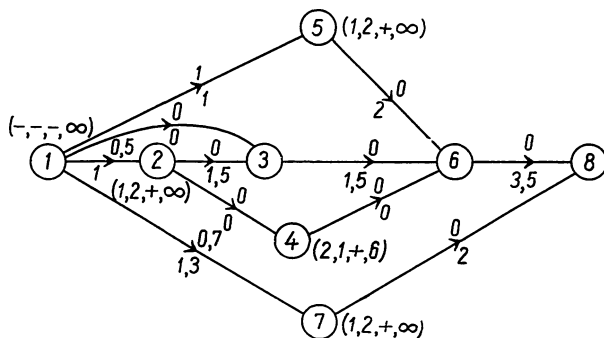


Рис. 30.19.

Вершина 8 отмечается индексом $[6, 1, +, 1, 50]$; индекс $[5, 2, +, \infty]$ у вершины 6 стираем. Теперь можно перейти к фазе B и увеличить поток.

ФАЗА B

Поток увеличивается на 1,50 для дуг $(6, 8; 1)$, $(3, 6; 1)$, $(2, 3; 2)$ и $(1, 2; 2)$. В остальном он остается неизменным.

ФАЗА A

Вершина 8 не может теперь отмечаться, так как

$$f_{68;1} = c_{68;1} = c_{68} = 5,00.$$

Отмеченные вершины и новый поток указаны на рис. (30.20). Так как вершина 8 осталась неотмеченной, переходим к фазе C .

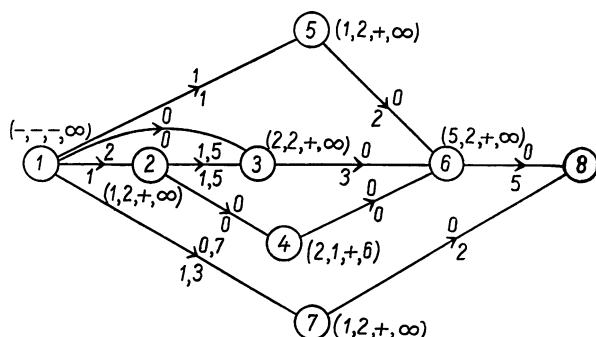
ФАЗА C

$$-\bar{d}_{68;2} = 2,$$

$$-\bar{d}_{78;2} = 39,$$

$$\delta_1 = \min_{A_1} [-\bar{d}_{ij;k}] = 2,$$

$$\delta = 2.$$



Р и с. 30.20.

Отсюда новый срок наступления события 8 (единственный измененный) будет 99. Новая сеть приводится на рис. (30.21a).

Поток на этом рисунке не указан.

Прирост полной стоимости по отношению к p ($\lambda=130$) равен

$$-\Delta p = 7 \times 99 - Z_{101} - 1,50 \times 101,$$

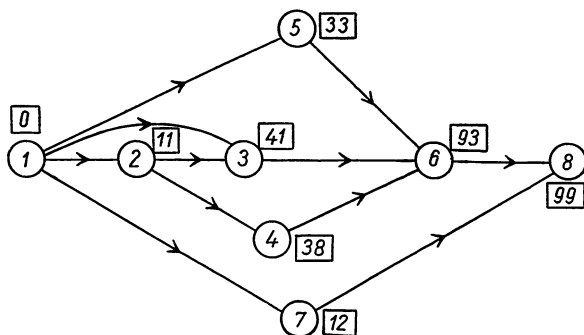
где 7 — полный поток, приходящий в вершину 8, см. рис. (30.20);
 1,50 — возрастание потока по отношению к тому, который
 был при $\lambda=101$ и $Z_{101}=652,5$,

$$-\Delta p = 693 - 652,5 - 151,5 = 693 - 804,$$

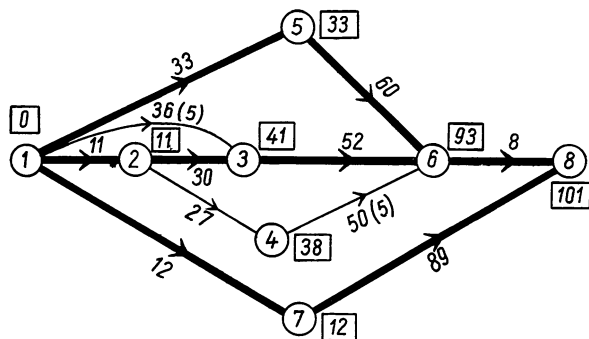
$$\Delta p = 111.$$

Прирост стоимости по отношению к p ($\lambda=101$) равен

$$\Delta'_p = 111 - 97 = 14.$$



Р и с. 30.21а.



Р и с. 30.21b.

Длительности операций вычисляются по формуле (28.21)

$$t_{ij} = \min [D_{ij}, (t_j - t_i)].$$

Сеть оптимального плана для $t_8=\lambda=99$ приводится на рис. (30.21b).

P_{13} и P_{46} имеют свободный резерв времени 5.

Имеются три критических пути:

[1, 2, 3, 6, 8], [1, 5, 6, 8] и [1, 7, 8].

7°. Прежде чем переходить к фазе А, надо составить новую таблицу, аналогичную таблице 30.2, исходя из вычисленных времен наступления событий.

Таблица 30.8

Операция P_{ij}	$t_i - t_j$	$\bar{a}_{ij}; 1 = D_{ij} + t_i - t_j$	$\bar{a}_{ij}; 2 = d_{ij} + t_i - t_j$
(1,2)	0—11 = -11	20—11 = 9	11—11 = 0
(2,3)	11—41 = -30	50—30 = 20	30—30 = 0
(3,6)	41—93 = -52	52—52 = 0	32—52 = -20
(6,8)	93—99 = -6	8—6 = 2	6—6 = 0
(1,3)	0—41 = -41	36—41 = -5	12—41 = -29
(2,4)	11—38 = -27	27—27 = 0	21—27 = -6
(4,6)	38—93 = -55	50—55 = -5	25—55 = -30
(1,5)	0—33 = -33	36—33 = 3	33—33 = 0
(5,6)	33—93 = -60	80—60 = 20	60—60 = 0
(1,7)	0—12 = -12	22—12 = 10	12—12 = 0
(7,8)	12—99 = -87	90—87 = 3	50—87 = -37

ФАЗА А

Приходим в вершину 8 по дугам $(i, j; 2)$ пути [1, 5, 6, 8]. См. рис. (30.22).

Вычисления окончены

Мы достигли точки А кривой оптимальных решений на рис. (26.1).

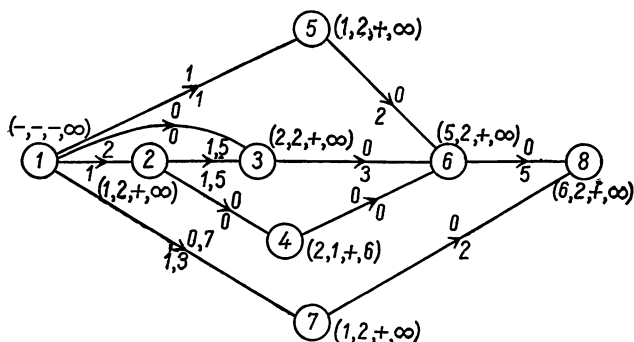


Рис. 30.22.

В таблице 30.9 приведены итоги произведенных вычислений.
(Через M_{ij} обозначен свободный резерв операции P_{ij} .)

Таблица 30.9

Операции	Длительности операций t_{ij}						
	0	1	2	3	4	5	6
(1,2)	20	14	11	11	11	11	11
(2,3)	50	50	50	41	31	30	30
(3,6)	52	52	52	52	52	52	52
(6,8)	8	8	8	8	8	8	6
(1,3)	36	36	36	36	36	36	36
M_{13}	34	28	25	16	6	5	5
(2,4)	27	27	27	27	27	27	27
(4,6)	50	50	50	50	50	50	50
M_{46}	25	25	25	16	6	5	5
(1,5)	36	36	33	33	33	33	33
(5,6)	80	80	80	71	61	60	60
M_{56}	6	—	—	—	—	—	—
(1,7)	22	22	22	22	12	12	12
(7,8)	90	90	90	90	90	89	87
M_{78}	18	12	9	—	—	—	—
$t_8=\lambda$	130	124	121	112	102	101	99
Δt_8	—	6	3	9	10	1	2
Δp	—	6	12	43,5	91,5	97	111
$\Delta' p$	—	6	6	31,5	48	5,5	14
$\Delta' p / \Delta t_8$	—	1	2	3,5	4,8	5,5	7,0

Теперь мы можем вычертить кривую OA — геометрическое место оптимальных решений, см. рис. (30.23).

Эта кривая представляет собой выпуклую ломаную. Наклоны ее последовательных звеньев даны в последней строке таблицы (30.9).

Этот пример применения алгоритма Фулкерсона может показаться читателю утомительным. Однако бесполезно полностью проследить его во всех деталях, если читатель хочет быть уверенным, что хорошо понял алгоритм.

Очевидно, что если сеть насчитывает порядка пятнадцати или более дуг, то ручные вычисления становятся невозможными и необходимо использовать электронную вычислительную машину.

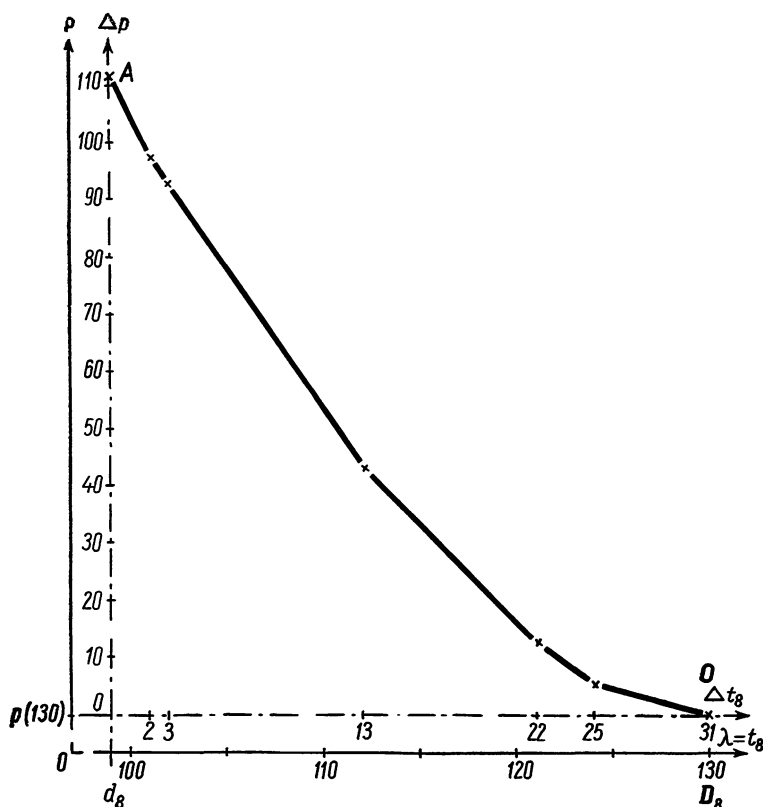


Рис. 30.23.

31. Оптимальный план реализации проекта

Благодаря параметрическому линейному программированию (параграф 27) или, точнее, благодаря алгоритму Фулкерсона оказалось возможным начертить кривую OA — геометрическое место оптимальных решений. Но задержка установки или отсрочка пуска объекта (завода, корабля и т. п.) могут в некоторых случаях выразиться в определенной стоимости, представляющей собою функцию от общей продолжительности всех работ. Это будет, к примеру, «упущенная прибыль», в случае

промышленной установки. В примере со строительством дачи это будут расходы заказчика на гостиницу. Если мы можем оценить или вычислить эту дополнительную стоимость $c = \varphi(t_n)$, то наиболее экономичным решением будет то, которое отвечает минимуму функции

$$\Gamma(t_n) = p(t_n) + \varphi(t_n),$$

где $p(t_n)$ — рассмотренная выше стоимость проекта.

Если кривая $c = \varphi(t_n)$ имеет простую форму (форму прямой или ломаной линии), то нахождение оптимальной сети можно рассматривать как простую задачу линейного программирования.

Если же кривая $c = \varphi(t_n)$ имеет более сложную форму, мы можем найти оптимальный срок графически, исходя из кривой OA оптимальных решений, полученной по алгоритму Фулкерсона и кривой $c = \varphi(t_n)$, см. рис. (31.1).

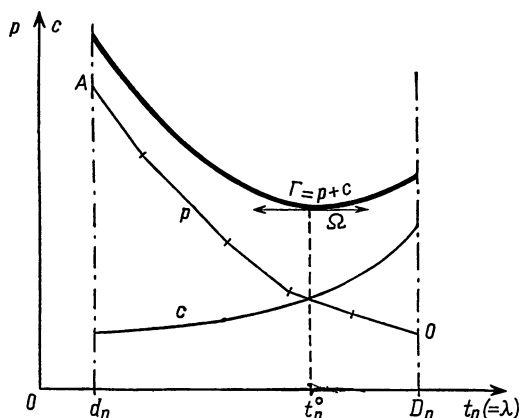


Рис. 31.1.

Оптимальный план соответствует точке Ω на рис. (31.1). При этом общая продолжительность работ будет t_n^0 .

32. Оптимизация плана реализации проекта, когда длительности операций случайны

До сих пор мы рассматривали случай, когда по заданной стоимости однозначно определяется длительность операции. Теперь мы рассмотрим случай, когда длительности операций случайны и их средние значения зависят от стоимости.

Величины, которые мы изучали во второй главе: a_{ij} , m_{ij} , b_{ij} , t_{ij} , σ_{ij}^2 , будут теперь функциями стоимости p_{ij} . Положим

$$r_{1ij} = \frac{a_{ij}}{t_{ij}} \quad \text{и} \quad r_{2ij} = \frac{b_{ij}}{t_{ij}}. \quad (32.1)$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \text{оптимистическая оценка длительности операции;} \\ b_{ij} &= \text{пессимистическая оценка длительности операции;} \\ m_{ij} &= \text{оценка «наиболее вероятной» длительности операции;} \\ t_{ij} &= (\hat{t}_{ij}) — \text{средняя длительность операции;} \\ \sigma_{ij}^2 &= \text{дисперсия.} \end{aligned} \quad (32.2)$$

Предположим, что r_{1ij} и r_{2ij} не зависят от t_{ij} и остаются неизменными также при изменении размеров финансовых ассигнований.

Величины r_{1ij} и r_{2ij} должны подчиняться некоторым ограничениям. Действительно, легко видеть, что поскольку

$$t_{ij} = \frac{1}{6} (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}),$$

то

$$1,20 - 0,20 r_{1ij} \leq r_{2ij} \leq 6 - 5r_{1ij} \quad (32.3)$$

или

$$6 - 5r_{2ij} \leq r_{1ij} \leq 1,20 - 0,20 r_{2ij}$$

и что

$$1,00 \geq r_{1ij} \geq 0. \quad (32.4)$$

Кроме того, для дисперсии имеет место равенство

$$\sigma_{ij}^2 = \left[\frac{1}{6} (b_{ij} - a_{ij}) \right]^2 = \frac{1}{36} (r_{2ij} - r_{1ij})^2 t_{ij}^2. \quad (32.5)$$

Следовательно, при выделении дополнительного кредита, когда длительности операций t_{ij} уменьшаются, будут уменьшаться и среднеквадратические отклонения σ_{ij} , причем уменьшение σ_{ij} будет пропорционально уменьшению t_{ij} с коэффициентом пропорциональности

$$\frac{1}{6} (r_{2ij} - r_{1ij}).$$

Для «наиболее вероятной» длительности m_{ij} получается выражение

$$m_{ij} = \frac{1}{4} [6 - (r_{1ij} + r_{2ij})] t_{ij}. \quad (32.6)$$

Предположение, согласно которому дисперсия длительности операции уменьшается, вместе со средним временем t_{ij} , когда стоимость операции возрастает, т. е. когда выделяются дополнительные финансовые средства, практически всегда приемлемо. Проиллюстрируем такой подход к оптимизации проекта на простом примере.

Рис. (32.1) представляет сеть некоторого проекта. Мы предположим, что стоимость операции линейно зависит от ее средней длительности t_{ij} , как это было сделано при изложении алгоритма Фулкерсона.

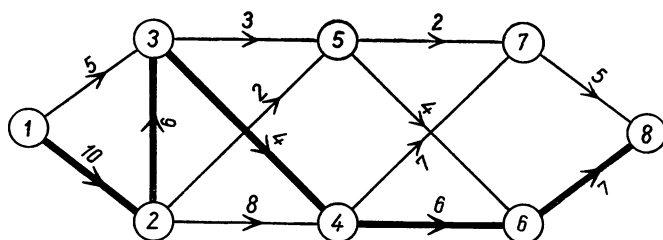


Рис. 32.1.

Числа на рис. (32.1), выписанные около дуг сети, показывают средние длительности операций D_{ij} , соответствующие нормальному плану.

Таблица 32.1

Операции	D_{ij}	Нормальная стоимость	d_{ij}	Максимальная стоимость	r_{1ij}	r_{2ij}
P_{12}	10,0	1000	5,0	1500	0,70	1,40
P_{13}	5,0	600	4,0	800	0,90	1,20
P_{23}	6,0	300	3,0	400	0,50	3,00
P_{24}	8,0	2000	5,0	3000	0,95	1,10
P_{25}	2,0	200	2,0	200	0,75	2,00
P_{34}	4,0	1000	3,0	1000	0,90	1,70
P_{35}	3,0	700	3,0	700	—	—
P_{46}	6,0	800	5,0	1200	0,60	2,50
P_{47}	7,0	200	6,0	200	—	—
P_{56}	4,0	750	3,0	850	—	—
P_{57}	2,0	50	1,0	50	—	—
P_{68}	7,0	900	6,0	1000	0,70	1,50
P_{78}	5,0	1000	4,0	4000	—	—

В итоговой таблице 32.2 приведены стоимости и средние продолжительности различных планов, отвечающих угловым точкам кривой OA оптимальных решений, изображенной на рис. (32.2).

Таблица 32.2

Планы реализации проекта	Средне-квадратическое отклонение	Средняя продолжительность (в неделях)	Стоимость (во франках)	Продолжительность реализации проекта при различных уровнях риска			
				0,1	0,01	0,001	0,0001
0	3,5	33	95 000	37,7	41,2	43,9	46,0
1	3,5	32	95 000	36,7	40,2	42,9	45,0
2	3,2	31	95 334	35,3	38,5	41,0	42,9
3	3,1	26	100 334	30,1	33,1	35,5	37,3
4	3,0	25	101 334	29,0	32,0	34,3	36,2
5	2,5	23	108 667	26,4	28,9	30,8	32,3
6	2,3	22	112 667	25,3	27,3	29,1	30,4

В четырех правых столбцах таблицы 32.2 указаны сроки, вероятность просрочки которых равна 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001.

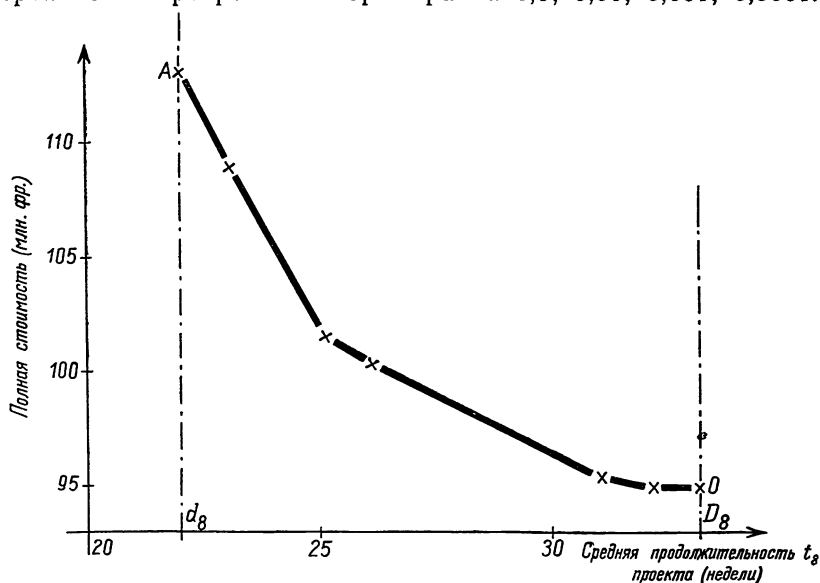


Рис. 32.2

Например, для плана № 0 вероятность того, что продолжительность его реализации превзойдет 41,2, равна 0,01. Иначе

говоря, 99 шансов из 100 за то, что план будет реализован быстрее, чем за 41,2 недели.

Правая часть таблицы 32.2 используется при выборе плана. Например, если для реализации плана в нашем распоряжении имеются 32 недели и этот срок обязателен, то мы выберем план № 5, гарантирующий достаточную уверенность в соблюдении этого срока. Напротив, если срок 32 недели не является обязательным, а только средним, то мы выберем план № 1.

Итак, идеи, развитые в настоящем параграфе, позволяют руководству при выборе плана реализации проекта учитывать в какой-то мере риск, связанный со случайным характером длительностей операций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подходя к концу настоящей работы, в которой изложены основные аспекты метода ПЕРТ и усовершенствования, внесенные в него за последнее время, мы считаем целесообразным сказать о путях дальнейшего развития этих методов.

Мы ввели понятие решающего события в сети проекта и рассматриваем это как первую попытку применения принципов динамического планирования при составлении плана реализации проекта.

Затем мы коснулись проблем оптимального распределения финансовых средств между различными операциями. В дальнейшем следовало бы рассмотреть проблему оптимального распределения материальных и людских ресурсов между различными операциями с учетом временных и технических ограничений. Эти проблемы должны решаться при заранее заданном числе людских и материальных ресурсов, ибо именно таковы наиболее часто встречающиеся практические задачи.

Таким образом, по нашему мнению, основные направления исследований должны быть сосредоточены на совершенствовании методов разработки планов реализации проектов.

Тем не менее мы полагаем, что применение метода ПЕРТ даже и в том виде, как он изложен в настоящей работе, позволит планирующим органам исследовать интересующие их проблемы с гораздо большей степенью точности.

Во время последнего посещения США мы имели возможность убедиться в том, что сетевые методы планирования и управления применяются почти повсюду при разработке планов реализации проектов, начиная от средних до самых крупных. В частности, руководство проектом «Аполлон», который должен обеспечить человечеству возможность ступить на Луну — самый грандиозный из существовавших когда-либо проектов, содержащий десятки тысяч операций, — полностью организовано на основе сетевых методов планирования и управления; это единственная, по мнению специалистов НАСА и Американской авиационной корпорации, система, позволившая полностью координировать действия сотен тысяч людей на многих заводах,

провести многочисленные исследования и эксперименты, наконец, единственная система, позволившая руководству вести эффективный контроль.

Во Франции сетевые методы планирования и управления также получают все большее распространение, в чем читатель может убедиться, обратившись к работе¹, находящейся сейчас в печати, которая дает полное представление о значении и возможностях этих методов. Кстати, оба примера, рассмотренные нами в параграфе 11, подробно освещены в статьях, включенных в эту книгу, которая будет полезна для каждого, кто пожелает применить эти методы на практике. Приводим перечень глав этой книги и фамилии авторов:

— Существо и методы проблемы упорядочения, Б. Руа (B. Roy).

— Применение методов исследования операций в строительстве, П. Пако (P. Pascaud).

— Планирование операций и расстановка персонала при использовании агрегата для скользящей опалубки, Ж. Розенский (J. de Rosenski).

— Планирование работ по ремонту оборудования сахарного завода, Д. Карре (D. Carré).

— Планирование операций при оборудовании Атлантических баз.

— Вклад теории графов в изучение проблемы упорядочения, Б. Руа (B. Roy).

— Использование языка программирования F L P L при решении проблемы упорядочения, П. Дарно и Г. Сандье (P. Darnaud, G. Sandier).

— Проблема упорядочения с дизъюнктивными ограничениями, Ф. Тан Ньем (Ph. Tuan Nghiem).

Применение сетевых методов планирования и управления содействует точности, ясности и дерзанию при реализации проектов. Оно представляет собою прекрасный пример ценности применения математических методов при организации работ.

¹ «Проблемы упорядочения», SOFRO, издательство Dunod, 1964.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

β-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

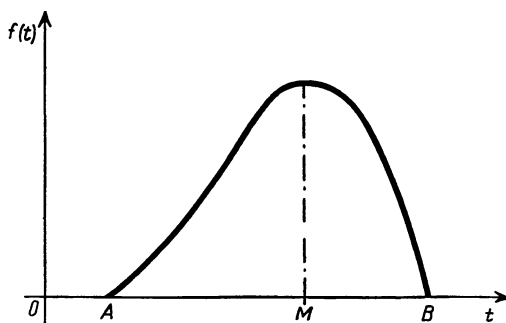
β-распределение — это распределение случайной величины t , изменяющейся в интервале $[A, B]$, где $A > 0$, $B > 0$, плотность вероятности которой определяется формулой

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < A, \\ \frac{(t-A)^\alpha (B-t)^\gamma}{(B-A)^{\alpha+\gamma+1} \beta(\alpha+1, \gamma+1)} & A \leq t \leq B, \\ 0 & B < t < \infty, \end{cases} \quad (I.1)$$

где

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (I.2)$$

— функция Эйлера первого рода и



Р и с. I.1.

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx \quad (I.3)$$

— функция Эйлера второго рода.

На рис. (I.1) дан вид этого распределения при фиксированных значениях параметров.

Рассмотрим также β -распределение нормированной случайной величины u , определяемой линейным преобразованием

$$t = A + (B - A)u. \quad (\text{I.4})$$

Преобразованная функция плотности приводится к нормированному виду

$$\varphi(u) = \begin{cases} 0 & -\infty < u < 0, \\ \frac{u^\alpha (1-u)^\gamma}{\beta(\alpha+1, \gamma+1)}, & 0 \leq u \leq 1, \\ 0 & 1 < u < \infty. \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Для нормированного β -распределения имеем

$$\bar{u} = E(u) = \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2} \quad (\text{I.6})$$

и

$$\sigma_u^2 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3)(\alpha+\gamma+2)^2}. \quad (\text{I.7})$$

Для ненормированного β -распределения соответственно

$$\bar{t} = E(t) = A + (B - A) \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2} \quad (\text{I.8})$$

и

$$\sigma_t^2 = \frac{(B-A)^2(\alpha+1)(\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3)(\alpha+\gamma+2)^2}. \quad (\text{I.9})$$

Мода ненормированного распределения, соответствующая $f'(t)=0$, равна

$$M = \frac{A\gamma + B\alpha}{\alpha + \gamma}. \quad (\text{I.10})$$

Это позволяет записать $\bar{t}$ в виде

$$\bar{t} = E(t) = \frac{A + B + (\alpha + \gamma)M}{\alpha + \gamma + 2}. \quad (\text{I.11})$$

В методе ПЕРТ выбирают

$$\alpha = 2 + \sqrt{2} \quad (\text{I.12})$$

и

$$\gamma = 2 - \sqrt{2}, \quad (\text{I.13})$$

или

$$\alpha = 2 - \sqrt{2} \quad (\text{I.14})$$

Этот факт

$$\nu = 2 + \sqrt{2}.$$

(1.15)

$$(1.16) \quad t = E(t) = \frac{A+B+(a+\nu)M}{A+B+4M}, \quad \frac{6}{a+\nu+2}$$

$$(1.17) \quad \sigma_2' = \frac{(B-A)^2(a+1)(\nu+1)^2}{(a+\nu+3)(a+\nu+2)^2} = \frac{36}{(B-A)^2} = \left(\frac{6}{B-A} \right)^2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ДЛИНЫ КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ СЕТИ¹

В этом приложении мы предложим метод вычисления приближенного значения средней длины критического пути сети, длины дуг которой являются случайными величинами.

Обычно, как мы видели, заменяют каждую случайную величину ее средним значением, после чего рассматривают эту задачу как задачу с детерминированными величинами. Эта оценка всегда оптимистична

$$g \leq e. \quad (\text{II.1})$$

Сейчас мы опишем способ вычисления лучшего приближения f , такого, что

$$g \leq f \leq e. \quad (\text{II.2})$$

1. Предположения и обозначения

Пусть вершины сети пронумерованы таким образом, что если существует дуга от вершины i к вершине j , то $i < j$ (рис. II.1). Дуги занумерованы (1), (2), ..., (m).

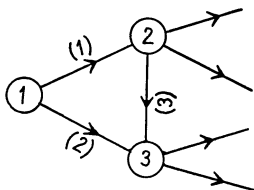


Рис. II.1.

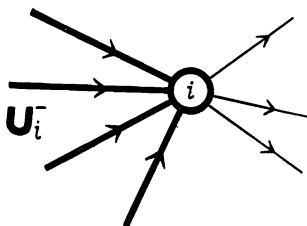


Рис. II.2.

U_i^- означает множество (или пучок) дуг, входящих в вершину i , см. рис. (II.2).

¹ Это изложение заимствовано из статьи, приведенной в библиографии под номером [9].

На рис. (II.1) имеем

$$U_1^- = \emptyset, U_2^- = \{(1)\}, U_3^- = \{(2), (3)\}$$

и т. д.

Длины дуг одного пучка могут быть зависимыми случайными величинами, но различные пучки мы будем предполагать независимыми.

Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — дуги пучка U_i^- , см. рис. (II.3),

$$U_i^- = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}, \quad (II.3)$$

то

$$t_{U_i^-} = (t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_k}) \quad (II.4)$$

— случайный вектор, где t_{α_k} — случайная величина — длина дуги α_k , точнее, случайная длительность операции, представляемой дугой α_k , а

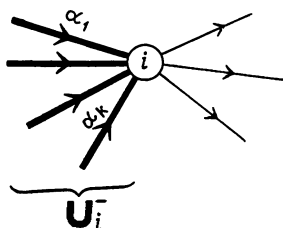


Рис. II.3.

$$p(t_{U_i^-})_1 \quad (II.5)^1$$

представляет собою значение вероятности вектора длительностей операций $t_{U_i^-}$.

При данном наборе значений t_j

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (II.6)$$

дуг сети величина

$$p(t) = p(t_{U_1^-}) p(t_{U_2^-}), \dots, p(t_{U_n^-}) \quad (II.7)$$

представляет собою вероятность этого набора, и

$$l_i(t) \quad (II.8)$$

обозначает длину² критического пути от вершины 1 к вершине i при данном наборе длительностей операций.

Тогда

$$e_i = \sum_t p(t) l_i(t) \quad (II.9)$$

представляет собой среднее значение длины критического пути из 1 в i .

¹ Предполагается, что случайные величины t_{α_k} принимают дискретные значения. — Прим. ред.

² Предпочтительнее было бы употреблять слово «величина» дуги или пути, используя его вместо слова «длина». В теории графов длиной пути называют число дуг, составляющих его, а длина дуги по определению равна 1. Здесь длина дуги обозначает длительность операции.

Но величина $l_i(t)$ не зависит от дуг пучков

$$U_{i+1}^-, U_{i+2}^-, \dots, U_n^-,$$

так как путь из 1 в i не проходит ни через одну из них. Если обозначить через V объединение множеств $U_1^-, U_2^-, \dots, U_i^-$

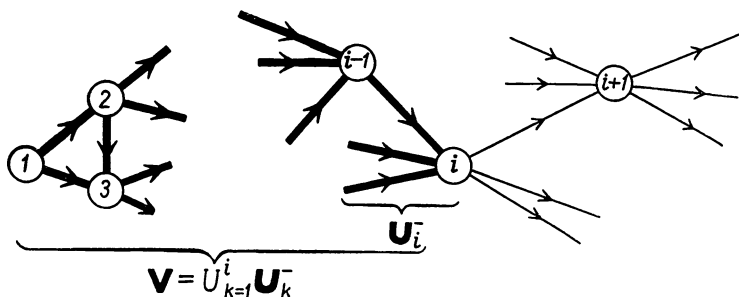
$$V = \bigcup_{k=1}^i U_k^-, \text{ см. рис. (II.4),} \quad (\text{II.10})$$

то выражение (II.9) можно записать в форме

$$e_i = \sum_{t_V} p(t_V) l_i(t_V), \quad (\text{II.11})$$

где

$$p(t_V) = p(t_{U_1^-}) \cdot p(t_{U_2^-}), \dots, p(t_{U_i^-}). \quad (\text{II.12})$$



Р и с. II.4.

Если t_{α_k} — случайная длина дуги α_k пучка U_i^-

$$\alpha_k \in U_i^-, \quad (\text{II.13})$$

то среднее значение длины этой дуги

$$\bar{t}_{\alpha_k} = \sum_{t_{U_i^-}} p(t_{U_i^-}) t_{\alpha_k}. \quad (\text{II.14})$$

В параграфе 12 главы 2 приближенное значение длины критического пути из вершины 1 в вершину i вычисляется следующим образом:

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ \vdots \\ g_i = \max(g_1 + \bar{t}_1, \dots, g_{i-1} + \bar{t}_{i-1}). \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Предположим теперь для упрощения обозначений, что множество U_i^- состоит из дуг, выходящих из вершин $1, 2, \dots, i-1$ и входящих в вершину i , и что эти дуги занумерованы соответственно $1, 2, \dots, i-1$, см. рис. (II.5). Если дуга k не существует, то $g_k + \bar{t}_k$ не принимается в расчет, или, что означает то же самое, $\bar{t}_k$ заменяется на $-\infty$.

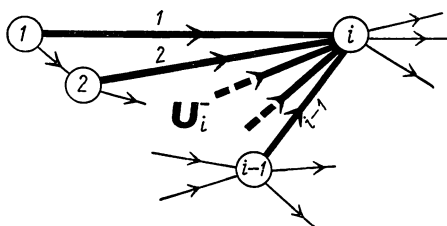


Рис. II.5.

При этих вычислениях принимается упрощающее предположение о том, что критический путь не меняется (т. е. состоит из одних и тех же дуг), каковы бы ни были случайные значения длин дуг сети.

2. Приближенное значение f длины критического пути

Теперь мы опишем способ вычислений, аналогичный (II.15), но несколько более сложный, который позволяет получить лучшее приближение средней длины критического пути.

Определим f_i следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_i = \sum_{t_{U_i^-}} p(t_{U_i^-}) \max(f_1 + t_1, \dots, f_{i-1} + t_{i-1}), \end{array} \right. \quad (II.16)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где, так же как и в (II.15),

$$t_{U_i^-} = (t_1, t_2, \dots, t_{i-1})$$

и $p(t_{U_i^-})$ — вероятность вектора длительностей операций $t_{U_i^-}$.

Проиллюстрируем формулы (II.15) и (II.16) на небольшом численном примере. Пусть дана сеть, изображенная на рис. (II.6), и предположим, что каждая дуга может принимать значения 0 или 1 каждое с вероятностью $1/2$.

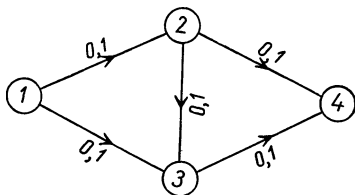


Рис. II.6.

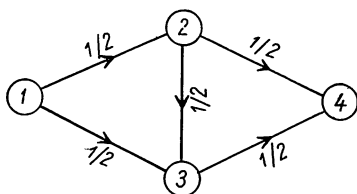


Рис. II.7.

Применяя формулы (II.15), получим

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = 1/2 \\ g_3 = 1 \\ g_4 = 3/2 \end{cases} \quad \text{см. рис. (II.7).}$$

При применении формул (II.16) будем иметь

$$f_1 = 0,$$

$$f_2 = \frac{1}{2} (f_1 + 0) + \frac{1}{2} (f_1 + 1) = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{4} \max (f_1 + 0, f_2 + 0) + \frac{1}{4} \max (f_1 + 0, f_2 + 1) + \\ &+ \frac{1}{4} \max (f_1 + 1, f_2 + 0) + \frac{1}{4} \max (f_1 + 1, f_2 + 1) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} \right) = 9/8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{1}{4} \max (f_2 + 0, f_3 + 0) + \frac{1}{4} \max (f_2 + 0, f_3 + 1) + \\ &+ \frac{1}{4} \max (f_2 + 1, f_3 + 0) + \frac{1}{4} \max (f_2 + 1, f_3 + 1) = \\ &= \frac{1}{4} (9/8 + 17/8 + 3/2 + 17/8) = 55/32. \end{aligned}$$

Заметим, что $g_4 < f_4$.

Покажем, что и в общем случае на сети ПЕРТ выполняется неравенство

$$g_i \leq f_i \leq e_i. \quad (\text{II.17})$$

Доказательство проведем по индукции.
Покажем сначала, что

$$g_{i+1} \leq f_{i+1}. \quad (\text{II.18})$$

Полагая

$$U = U_{i+1}^- = \{1, 2, \dots, i\}, \quad \text{см. рис. (II.8),} \quad (\text{II.19})$$

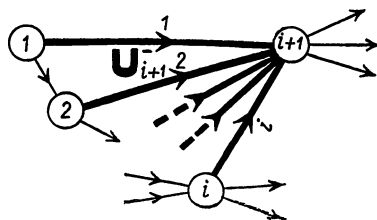
имеем

$$f_{i+1} = \sum_{t_U} p(t_U) \max(f_1 + t_1, \dots, f_i + t_i) \quad (\text{II.20})$$

или

$$f_{i+1} = \sum_{t_U} \max[p(t_U)(f_1 + t_1), \dots, p(t_U)(f_i + t_i)], \quad (\text{II.21})$$

$$f_{i+1} \geq \max\left[\sum_{t_U} p(t_U)(f_1 + t_1), \dots, \sum_{t_U} p(t_U)(f_i + t_i)\right]. \quad (\text{II.22})$$



Р и с. II.8.

Так как $f_1, \dots, f_i$ не зависят от t_U , из (II.14) вытекает, что

$$f_{i+1} \geq \max(f_1 + \bar{t}_1, \dots, f_i + \bar{t}_i). \quad (\text{II.23})$$

Предполагая справедливость неравенства (II.18) для $1, 2, \dots, i$, получим

$$f_{i+1} \geq \max(g_1 + \bar{t}_1, \dots, g_i + \bar{t}_i) = g_{i+1}. \quad (\text{II.24})$$

Теперь докажем, что

$$e_{i+1} \geq f_{i+1}. \quad (\text{II.25})$$

Для этого положим

$$V = \bigcup_{k=1}^i U_k^-, \quad W = \bigcup_{k=1}^{i+1} U_k^- \quad \text{и} \quad U = U_{i+1}^- = \{1, 2, \dots, i\}. \quad (\text{II.26})$$

См. рис. (II.4), (II.8) и (II.9).

Из (II.11), (II.12) и из равенства

$$l_{i+1}(t_W) = \max [l_1(t_V) + t_1, \dots, l_i(t_V) + t_i] \quad (\text{II.27})$$

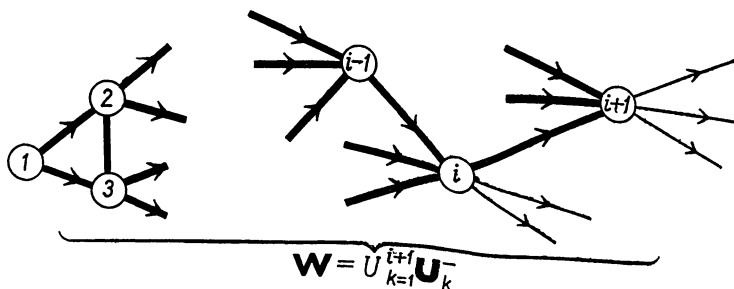
получаем

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= \sum_{t_W} p(t_W) l_{i+1}(t_W) = \\ &= \sum_{t_U} p(t_U) \sum_{t_V} p(t_V) \max [l_1(t_V) + t_1, \dots, l_i(t_V) + t_i] \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

или

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= \sum_{t_U} p(t_U) \sum_{t_V} \max \{p(t_V) [l_1(t_V) + t_1], \dots, p(t_V) \times \\ &\quad \times [l_i(t_V) + t_i]\}. \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

$$\begin{aligned} e_{i+1} &\geq \sum_{t_U} p(t_U) \max \left\{ \sum_{t_V} p(t_V) [l_1(t_V) + t_1], \dots, \right. \\ &\quad \left. \sum_{t_V} p(t_V) [l_i(t_V) + t_i] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$



Р и с. II.9.

В силу (II.11) имеем

$$e_{i+1} \geq \sum_{t_U} p(t_U) \max [e_i + t_1, \dots, e_i + t_i]. \quad (\text{II.31})$$

Предполагая справедливость (II.25) для 1, 2, ..., i и используя (II.16), получим

$$e_{i+1} \geq \sum_{t_U} p(t_U) \max [f_1 + t_1, \dots, f_i + t_i] = f_{i+1}, \quad (\text{II.32})$$

то есть (II.25) справедливо и (II.17) доказано.

Следует заметить, что неравенства $g_i \leq e_i$ справедливы и в том случае, когда пучки зависимы. Напротив, предположение о независимости пучков существенно для (II.17).

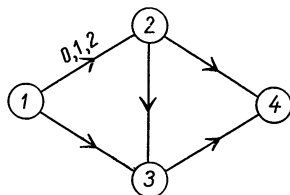
3. Некоторые численные примеры

В этом параграфе мы приведем несколько численных примеров для сравнения величин g_n , f_n и e_n . В каждом из этих примеров мы предполагаем, что длины всех дуг имеют одно и то же распределение вероятностей и независимы между собой.

Числа около дуг указывают значения, которые могут принимать длительности соответствующих операций. Для примеров 2 и 3 исчисления были проведены на вычислительной машине.

ПРИМЕР 1

$$g_4 = 3,00, \quad f_4 = 3,22, \quad e_4 = 3,32.$$

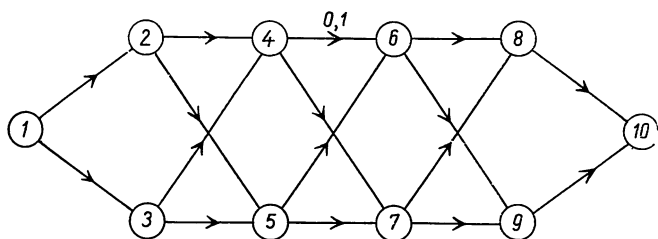


Р и с. II.10.

Распределение длины критического пути

l_4	0	1	2	3	4	5	6
Частота	1	11	50	74	71	27	9

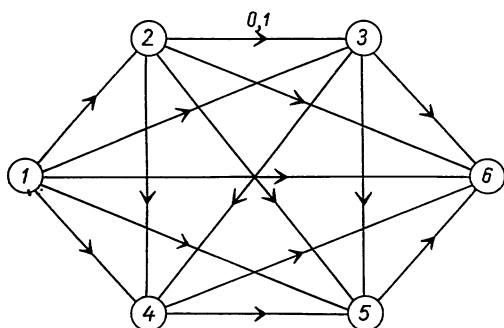
ПРИМЕР 2



Р и с. II.11.

$$g_{10} = 2,50, \quad f_{10} = 3,50, \quad e_{10} = 3,95.$$

ПРИМЕР 3



Р и с. II.12.

$$g_6 = 2,50, \quad f_6 = 2,92, \quad e_6 = 2,95.$$

Эти три примера показывают, что приближение f лучше, чем приближение g .

ПРИЛОЖЕНИЕ III

РАЗБИЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ И РЕАЛИЗАЦИЯ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА¹

В этом приложении мы рассмотрим влияние разбиения операций на вероятность выполнения операций в запланированный календарный срок. Более точно, рассматриваемая здесь проблема состоит в следующем.

«Если задана операция (или последовательность операций), оканчивающаяся определенным событием, дата которого фиксирована, желательно выяснить влияние разбиения операции (или операций) на вероятность наступления события к указанному сроку».

Предположим, что операция, оптимистическая, наиболее вероятная и пессимистическая длительности которой известны и которые равны соответственно a , m и b , разбита на n последовательных подопераций с оптимистическими, наиболее вероятными и пессимистическими оценками длительностей, соответственно равными a_i , m_i , b_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Предположим еще, что

$$\sum_{i=1}^n a_i = a, \quad \sum_{i=1}^n b_i = b, \quad \sum_{i=1}^n m_i = m \quad (\text{III.1})$$

и что длительности подопераций являются независимыми случайными величинами.

Имеем

$$d = \sum_{i=1}^n d_i, \quad (\text{III.2})$$

где

$$d = b - a, \quad d_i = b_i - a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

¹ Взято из статьи, приведенной в библиографии под номером [10].

Используя выражение для математического ожидания и дисперсии β -распределения применительно к длительности исходной операции, будем иметь

$$E(t) = \frac{1}{6}(a + 4m + b), \quad (\text{III.3a})$$

$$\sigma^2(t) = \left[\frac{1}{6}(b - a) \right]^2 = d^2/36. \quad (\text{III.3б})$$

После разбиения

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \sum_{i=1}^n E(t_i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (a_i + 4m_i + b_i) = \\ &= \frac{1}{6}(a + 4m + b), \end{aligned} \quad (\text{III.4a})$$

$$\sigma_n^2(t) = \sum_{i=1}^n \sigma^2(t_i) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{6}(b_i - a_i) \right]^2 = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^n d_i^2. \quad (\text{III.4б})$$

Из III.4a видно, что

$$E(t) = E_n(t).$$

Равенство (III.3б) может быть записано следующим образом:

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{36} d^2 = \frac{1}{36} \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2 = \frac{1}{36} \left(\sum_{i=1}^n d_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum d_i d_j \right). \quad (\text{III.5})$$

Так как $d_i \geq 0$ для всех i , сравнение (III.4б) и (III.5) показывает, что

$$\sigma^2(t) \geq \sigma_n^2(t). \quad (\text{III.6a})$$

Рассматривая только невырожденные случаи, мы запишем

$$\sigma^2(t) > \sigma_n^2(t). \quad (\text{III.6б})$$

В методе ПЕРТ вероятность реализации события к фиксированному календарному сроку T_s получается следующим образом. Сначала вычисляется величина

$$y = \frac{T_s - E(T)}{\sqrt{\sigma^2(T)}}, \quad (\text{III.7a})$$

где $E(T)$ и $\sigma^2(T)$ — математическое ожидание и дисперсия времени наступления события, а затем искомая вероятность бе-

рется из таблицы нормированного нормального распределения.

В тексте настоящего приложения t обозначает длительность операции, T — фактическую дату реализации события и T_s — предварительно установленный календарный срок.

$$P(T \leq T_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz. \quad (\text{III.76})$$

Предположим теперь, что разбиваемая операция находится на пути, по которому вычисляются $E(T)$ и $\sigma^2(T)$. Мы можем также предположить, что подразделяемая операция — первая на этом пути. Пусть $\sigma^2(t)$ — дисперсия длительности первой операции (до разбиения) и σ^2 — сумма дисперсий, взятая по всем последующим операциям этого пути; тогда дисперсия времени наступления события равна

$$\sigma^2(T) = \sigma^2(t) + \sigma^2. \quad (\text{III.8})$$

Из равенств (III.7a) и (III.8) получаем

$$y = \frac{T_s - E(T)}{\sqrt{\sigma^2(t) + \sigma^2}} \quad (\text{III.9a})$$

перед разбиением первой операции и

$$y_n = \frac{T_s - E(T)}{\sqrt{\sigma_n^2(t) + \sigma^2}}. \quad (\text{III.9b})$$

после ее разбиения.

Из (III.6b) и (III.9) следует, что

$$|y_n| > |y|. \quad (\text{III.10})$$

Здесь возможны три случая:

- при $T_s > E(T)$ вероятность наступления события к установленному сроку (или раньше) возрастет;
- при $T_s < E(T)$ эта вероятность уменьшится;
- при $T_s = E(T)$ она не изменится.

Равенства (III.7) показывают, что вероятность можно варьировать, изменяя T_s , $E(T)$ и $\sigma^2(T)$.

Рассмотрим сначала изменения только $\sigma^2(T)$ или, более точно, такие изменения $\sigma^2(T)$, которые являются результатом разбиения первой операции.

Дисперсия длительности операции после разбиения равна

$$\sigma_n^2(t) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^n d_i^2.$$

Сумма может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i d)^2 = d^2 \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (\text{III.11})$$

где $0 < x_i < 1$ при всех i и

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1. \quad (\text{III.12})$$

Используя метод Лагранжа для нахождения условного экстремума, легко убедиться, что при разбиении операции на n подопераций значения $x_i = \frac{1}{n}$, $i=1, 2, \dots, n$ минимизируют сумму (III.11) при условии (III.12). Таким образом

$$\min \sigma_n^2(t) = \frac{1}{36} d^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{36} \frac{d^2}{n}. \quad (\text{III.13})$$

Чтобы найти максимум дисперсии при разбиении на подоперации, предположим, что разности $b-a$ для самой операции и для подопераций — целые числа. Это ограничение не кажется очень жестким, если за единицу времени принята неделя или день.

Исходную операцию, интервал $b-a$ которой обозначим через d , разделим на две части таким образом, чтобы разности b_i-a_i для двух подопераций, полученные в результате ее разбиения, были соответственно равны $d-1$ и 1 . Из рассмотрения кривой $f(x)=x^2$ ясно, что этому виду разбиения соответствует максимум дисперсии. Аналогично разбиению на три подоперации, для которых разности b_i-a_i равны, $d-2$, 1 и 1 также соответствует максимум дисперсии. Продолжая и далее эту интуитивно отмеченную закономерность, приходим к выводу, что максимальная дисперсия при разбиении на n подопераций будет равна

$$\begin{aligned} \max \sigma_n^2(t) &= \frac{1}{36} [(d-n+1)^2 + (n-1)] = \\ &= \frac{1}{36} [d^2 - (2d-n)(n-1)] \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

при естественном ограничении $n \leq d$.

Равенства (III.13) и (III.14) дают таким образом нижнюю и верхнюю границы дисперсии $\sigma_n^2(t)$ при разбиении операции на n подопераций.

$$\frac{1}{36} \frac{d^2}{n} \leq \sigma_n^2(t) \leq \frac{1}{36} [d^2 + (2d-n)(n-1)]. \quad (\text{III.15})$$

Границы для $\sigma_n^2(t)/\sigma^2(t)$ равны

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\sigma_n^2(t)}{\sigma^2(t)} \leq 1 - \frac{(2d-n)(n-1)}{d^2}. \quad (\text{III.16})$$

На рис. (III.1) приведены кривые, соответствующие уравнению (III.16) при различных значениях d и n .

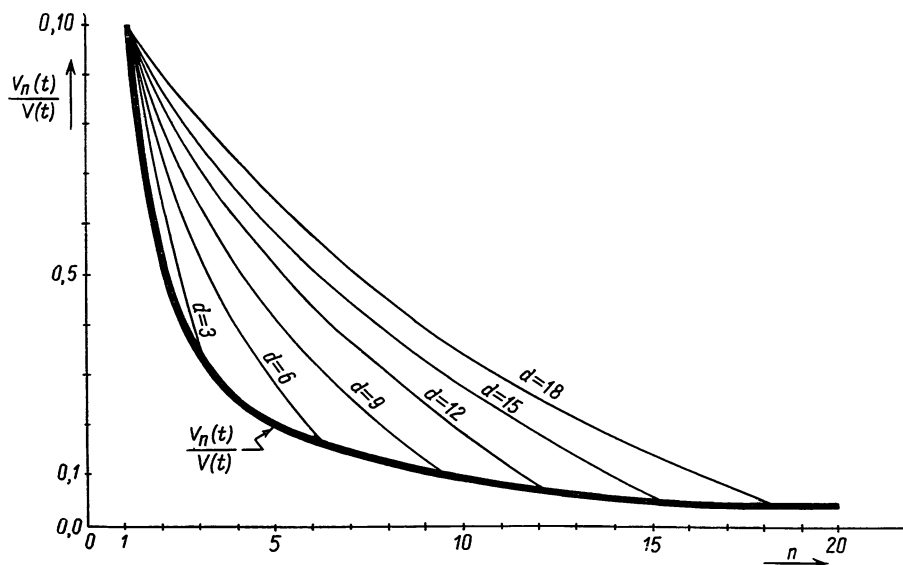
Проиллюстрируем влияние разбиения операции (или операций) на следующем примере.

а) Предположим, что в сети проекта на критическом пути, ведущем к конечной цели, имеется 100 операций, каждая из которых обладает дисперсией 6,25 (т. е. $d=15$), и что

$$T_S - E(T) = -13.$$

Тогда $\sigma^2(T) = 625$ и из формулы (III.7) находим

$$P(T \leq T_S) = 0,30.$$



Р и с. III.1.

б) Предположим теперь, что 1) каждая из 100 операций разбита на 3 подоперации, соответствующие условиям (III.1), что дает в целом 300 операций на критическом пути; 2) T_S и $E(T)$ остаются неизменными. Тогда из (III.16) следует

$$208,125 \leq \sigma_3^2(T) \leq 475$$

и из (III.7)

$$0,18 \leq P(T \leq T_S) \leq 0,27.$$

с) Если операции разбить на 6 подопераций, то

$$104,375 \leq \sigma_6^2(T) \leq 291,875$$

и

$$0,10 \leq P(T \leq T_S) \leq 0,22.$$

Если в предыдущем примере зафиксировать календарную дату T_S позднее ожидаемого времени наступления события, например $T_S - E(T) = +13$, то в этом случае в силу симметричности нормального распределения соответствующие вероятности будут равны

$$a') P(T \leq T_S) = 0,70;$$

$$b') 0,73 \leq P(T \leq T_S) \leq 0,82;$$

$$c') 0,78 \leq P(T \leq T_S) \leq 0,90.$$

Влияние разбиения операций можно проследить также, исследуя изменение T_S в зависимости от $\sigma^2(T)$ при условии, что вероятность наступления события в срок остается неизменной. Итак, предположим, что $E(T)$ фиксировано и мы можем изменять T_S . Вероятность наступления события к заданному календарному сроку равна

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(T_S - T_E)/\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz, \quad (\text{III.17})$$

где $T_E = E(T)$ и $\sigma^2 = \sigma^2(T)$ представляет собою среднеквадратическое отклонение.

Дифференцируем

$$dP = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(T_S - T_E)^2}{\sigma^2}\right) \left[\Delta T_S - \frac{\Delta \sigma (T_S - T_E)}{\sigma} \right]. \quad (\text{III.18})$$

Из условия $dP = 0$ получаем

$$\Delta T_S = (T_S - T_E) \frac{\Delta \sigma}{\sigma}. \quad (\text{III.19})$$

Чтобы проиллюстрировать изменение T_S , возьмем предыдущий пример.

а) Когда каждая из 100 операций разбивается на три подоперации, тогда

$$-10,57 \leq \Delta \sigma \leq -3,21$$

и уравнение (III.19) дает

$$1,67 \leq \Delta T_S \leq 5,50.$$

Таким образом, назначенный календарный срок может быть изменен не менее чем на 1,67 и не более чем на 5,50, чтобы

$$P(T \leq T_S) = 0,30.$$

b) Когда каждая из 100 операций разбивается на 6 подопераций, имеем

$$-13,82 \leq \Delta \sigma \leq -6,36,$$

$$3,31 \leq \Delta T_S \leq 7,19,$$

т. е. назначенный календарный срок может быть изменен не менее чем на 3,31 и не более чем на 7,19, чтобы

$$P(T \leq T_S) = 0,30.$$

Наконец, полный дифференциал выражения (III.17) равен

$$\begin{aligned} dP = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(T_S - T_E)^2}{\sigma^2} \right) \times \\ \times \left[\Delta T_S - \Delta T_E - (T_S - T_E) \frac{\Delta \sigma}{\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Это выражение можно использовать для вычисления влияния на вероятность реализации изменений одной (или нескольких) из величин T_S , T_E и σ .

БИБЛИОГРАФИЯ

За недостатком места мы не можем, конечно, перечислить все статьи, опубликованные по вопросам, относящимся к системе ПЕРТ. Поэтому мы указываем лишь на основные из них, которые были использованы при подготовке настоящей книги и которые могут представить интерес для читателя.

Монографии

- [1] Berge G., *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, 1958 (русский перевод; К. Бер ж, *Теория графов и ее применение*, ИЛ, М., 1962 г.).
- [2] Kaufmann A., et Cruon R., *La programmation dynamique et ses applications*, Dunod (в печати).
- [3] Kaufmann A., *Méthodes et modèles de la Recherche opérationnelle*, Tome 2, Dunod, 1964.

Эти работы не затрагивают непосредственно методов сетевого планирования, но они содержат различные элементы теории графов и динамического программирования, которые были использованы во многих параграфах настоящей книги.

Статьи

Глава 2

- [4] PERT., Phase I and II, Summary Report, Special Projects Office. Dept of Navy, Washington D. C.
- [5] Malcolm D. G., Roseboom J. H., Clark C. E., et Fazar W., Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, *Operations Research*, Vol. 7, № 5, 1959.
- [6] Fuchs C., Une méthode d'Analyse et d'évaluation des programmes: le

PERT, *Chefs d'Entreprise*, juillet/août 1962, A. Etude Centre Français de R. O., PERT, 12/61.

Эти три статьи — основные для главы 2. Можно ознакомиться с любой из них, безразлично, с какой именно.

[7] Grubbs Frank E., Attempts to validate certain PERT statistics or «picking on PERT», *Opns. Res.*, Vol. 10, № 6, 1962.

[8] Clark Charles E., The PERT model for distribution of an activity time, *Opns. Res.*, Vol. 10, № 3, 1962.

Статьи [7] и [8] посвящены β -распределению, используемому в системе PERT.

[9] Fulkerson D. R., Expected critical path lengths in PERT networks, *Opns. Res.*, Vol. 10, № 6, 1962.

[10] Healy Thomas L., Activity Subdivision and PERT probability statements, *Opns. Res.*, Vol. 9, № 3, 1961.

[11] Ventura E., Impressions sur les tendances actuelles de la Recherche opérationnelle aux USA, *Revue Française de Recherche opérationnelle (SOFRO)*, № 25.

[12] Roy B., Graphes et Ordonnancements, *SOFRO*, № 25.

Статьи [11] и [12] представляют собой очень хорошее введение в метод ПЕРТ.

[13] Roy B., Contribution de la théorie des graphes à l'étude des problèmes d'ordonnement. 2^e Conférence Internationale sur la R. O., Aix-en-Provence (septembre 1960).

[14] Roy B., Contribution de la théorie des graphes à l'étude de certains problèmes linéaires, *C. R. Acad. Sciences*, Vol. 248, p. 2437, séance du 27 avril 1959.

[15] Roy B., Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnement, *METRA*, série spéciale, № 1 (mars 1962).

[16] Roy B., et Simonnard M., Nouvelle méthode permettant d'explorer un ensemble de possibilités et de déterminer un optimum, *Revue Française de Recherche opérationnelle*, № 18.

[17] Algan M., Roy B., et. Simonnard M., Principe d'une méthode d'exploration de certains domaines et application à l'ordonnement de la construction des grands ensembles, *Cahiers du Centre de Mathématiques et de Statistique appliquées aux Sciences sociales*. Ed. Institut Solvay, Bruxelles, № 3 (1962), p. 41.

Статьи [13]—[17] позволяют читателю глубже разобраться в методе потенциалов, о котором мы говорили в конце главы 2.

Глава 3

[18] Eisner Howard, A generalized network approach to the planning and scheduling of a research project, *Opns. Res.*, Vol. 10, № 1.

[19] Information Scientifique Bull., *La programmation dynamique*, par A. Kaufmann.

- [20] Carré, Méthode du Chemin Critique. Service Technologie Shell. Petit Couronne (Rouen).
- [21] Kelley James E., Critical Path Planning and Scheduling, *Mathematical Basis, Opns. Res.*, Vol. 9, № 3, 1961.
- [22] Kelley James E. Jr., Morgan R., Walker, Critical Path Planning and Scheduling, 1959. Proceeding of the Eastern Joint computer conference, p. 160—173.
- [23] Fulkerson D. R., A Network Flow computation for project cost curves:
Rand Paper, P—1947, 18 mars 1960;
Management Science, janvier 1961.
- [24] Bildson R. A., et Gillespie J. R., Critical Path planning PERT integration. *Opns. Res.*, Vol. 10, № 6, 1962.
 Читатель, желающий располагать более полной библиографией американских статей по методу ПЕРТ, может обратиться к:
- [25] Bigelow Clifford George, Bibliography on Project Planning and Control by Network Analysis, *Opns. Res.*, Vol. 10, № 5, 1959—1961.

СОДЕРЖАНИЕ

От издательства	5
Предисловие к французскому изданию	9
От авторов	13

Глава 1

Графы и упорядочение

1. Введение	15
2. Граф	15
3. Отношение строгого порядка в связном графе без контуров . .	20
4. Разбиение связного графа без контуров на слои	20
5. Исследование упорядочения	34

Глава 2

Планирование исследовательских или производственных проектов

6. Введение	39
7. Представление проектов (комплексов операций) с помощью сетей	39
8. Время завершения комплекса операций. Критический путь . .	47
9. Резервный интервал события. Резервы времени операций . . .	50
10. Нахождение критического пути. Используемые алгоритмы . . .	54
11. Два примера практического применения	62
12. Операции со случайной длительностью	77
13. Реализация календарного плана	87
14. Использование электронных вычислительных машин	89

Глава 3

Обобщение метода ПЕРТ

15. Введение	93
16. Решающие события	93
17. Некоторые уточнения используемой терминологии	96

18. Определение возможных конечных событий (исходов)	97
19. Вероятности наступления конечных исходов	99
20. Функция энтропии	100
21. Обобщенный метод ПЕРТ	101

Глава 4

Оптимизация стоимости проекта (комплекса операций)

22. Введение	104
23. Некоторые общие соображения	104
24. Уменьшение полной стоимости проекта (комплекса операций)	106
25. Ускорение реализации проекта (комплекса операций) при наименьших затратах	110
26. Произвольный вид зависимости стоимости операций от ее длительности	113
27. Линейная зависимость стоимости от длительности. Задача параметрического линейного программирования	115
28. Алгоритм Фулкерсона	117
29. Полное описание итеративной процедуры алгоритма Фулкерсона	121
30. Пример применения алгоритма Фулкерсона	125
31. Оптимальный план реализации проекта	150
32. Оптимизация плана реализации проекта, когда длительности операций случайны	151
Заключение	156
Приложение I. β -распределение	158
Приложение II. Среднее значение длины критического пути сети	161
Приложение III. Разбиение операций и реализация календарного плана	170
Библиография	177

А. Кофман, Г. Дебазей

СЕТЕВЫЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ

Применение системы ПЕРТ
и ее разновидностей
при управлении производственными
и научно-исследовательскими
проектами

Редактор *Ф. Окунева*

Художник *А. Бессонов*

Художественный редактор *А. Купцов*

Технические редакторы *С. Приданцева*
и *А. Токер*

Сдано в производство 10/VIII—1966 г.

Подписано к печати 20/IX—1967 г.

Бумага 60×90¹/₁₆. Бум. л. 5³/₄—

Печ. л. 11.50

Уч.-изд. л. 8.87 Изд. № 3.6730

Зак. 3282. Цена 74 коп.

Издательство «Прогресс»

Комитета по печати при Совете

Министров СССР

Москва, Г-21, Зубовский бульвар, 21

Отпечатано с готового набора
типографии из-ва МГУ
в московской тип. № 7 «Искра
революции» Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Пер. Аксакова, 13.