

64-6
11797

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ
ПО РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ
СССР

Экз. № 4

ПЕРЕВОД № 682

Ричард Ван Слаик

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО И ПРОБЛЕМА PERT

Richard Van-Slyke

MONTE CARLO METHODS AND THE PERT PROBLEM

Источник: Operations Research,
1963, v.II, N 5, p.839-860.

Рассматриваются вопросы решения проблем PERT методом Монте-Карло. Показано, что метод Монте-Карло дает более точное решение при менее жестких предположениях. Кроме того, метод Монте-Карло позволяет производить оценку таких параметров сетей PERT, как показатель критичности, что невозможно обычными методами. Большое внимание уделяется характеру распределения продолжительности "деятельностей". Приводятся числовые примеры общего характера.

Многие проблемы планирования могут быть выражены в виде сети, в которой "деятельности" обозначены дугами. Длина этих дуг равна времени, необходимому для осуществления определенных деятельностей, а узловые точки обозначают "события", которые отмечают начало и конец времени осуществления той или иной деятельности. Если продолжительность деятельностей постоянна, то с помощью очень простого алгоритма можно получить величину всей планируемой продолжительности и указать те деятельности, которые расположены на "критическом пути". Метод PERT позволяет опознать неопределенности в продолжительности деятельностей, если выразить эти продолжительности случайными величинами. Сравнительно грубое решение достигается путем сокращения проблемы до вышеуказанного случая с помощью соответствующей аппроксимации.

В настоящей статье вначале рассматривается использование метода Монте-Карло для решения проблем PERT при менее жестких предположениях. Приводятся полученные величины точности, времени вычисления, а также рассматриваются способы сокращения процесса вычисления. В конце статьи определяется показатель "критичности" для каждой деятельности. Этот показатель есть просто вероятность того, что данная деятельность будет на критическом пути.

Планирование сроков различного характера может быть представлено в виде направленной ациклической сети, в которой планируемые деятельности соответствуют дугам сети. Длина этих дуг равна продолжительности данных деятельностей. Структура сети отражает возможный порядок осуществления этих видов деятельности, а планируемая продолжительность выражается в виде самого длинного пути в сети. Если точно известна продолжительность каждой деятельности, то нахождение самого длинного пути (называемого "критическим путем") осуществляется довольно просто даже в очень больших сетях. К сожалению, во многих случаях, особенно при планировании исследований и разработок, продолжительность различных деятельностей известна с большой степенью неточности. Именно для устранения этого недостатка в планировании была создана система PERT. По методу, описанному в данной статье, длина дуги (продолжительность деятельности) рассматривается как случайная величина с известным распределением. Этот метод ставит две важные проблемы: определение распределений

для дуг и решение модели (т.е. нахождение того, что соответствует, в определенном смысле, планируемой продолжительности и критическому пути в детерминистском случае). Обе эти проблемы до некоторой степени решаются путем аппроксимации стохастической проблемы в проблему детерминистского вида. Здесь делается попытка охарактеризовать качественные аспекты индивидуальных сетей, которые указывают, достаточно ли сократить стохастическую проблему критического пути до детерминистской. Задачей статьи является также оценка величины возникающих при этом ошибок.

Для осуществления этого обращаются к методу Монте-Карло. Теперь ясно, что метод Монте-Карло может применяться для более точного решения сетей PERT и для оценки величин, которые невозможно получить с помощью стандартного метода PERT. В частности, можно определить "критичность" деятельности, т.е. вероятность того, что деятельность находится на критическом пути. Это чрезвычайно помогает выявить степень внимания, которое руководство должно уделить той или иной деятельности, и не так вводит в заблуждение, как применяемое в настоящее время понятие критического пути.

В следующем разделе дается более детальная характеристика модели PERT и определяется соответствующая терминология. Затем анализируются применяемые в настоящее время методы решения. Особое внимание уделяется имеющим большое значение предположениям. Далее описывается моделирование по методу Монте-Карло и применяемый статистический анализ.

Рассматриваются возможные варианты сокращения процесса вычисления. Одним из них является сокращение за счет увеличения дисперсии оценки. В последнем разделе дается оценка использования методов моделирования для решения сетей, а в приложении многие моменты иллюстрируются на примерах.

МОДЕЛЬ PERT

Дана конечная ациклично направленная сеть из дуг, которые мы называем деятельностями, и их узловые точки, которые мы называем событиями. Каждая деятельность характеризуется положительной случайной величиной, которую называем продолжительностью. Имеются два особых события: начальное и конечное. Ни одна деятельность не выходит за пределы конечного и начального событий, и каждая деятельность направлена по прямому пути от начального события к конечному. Обычно предполагают, что продолжительности имеют независимые распределения с определенным диапазоном каждое. Реализация сети есть сеть с постоянным значением для каждой продолжительности. В каждой данной реализации сети самый длинный путь от начального до конечного события называется критическим путем, а его длина - планируемой продолжительностью. Часто говорят о случайной величине, соответствующей планируемой продолжительности, и ее распределении.

СИСТЕМА PERT

Основным видом данных, необходимых для системы PERT, является распределение продолжительности деятельности. Именно здесь аппроксимации становятся особенно большими, если до некоторой степени не неизбежными. Данные об этих распределениях получают от техников, которые имели некоторый опыт с данной деятельностью, хотя, например, при планировании исследований и разработок может встретиться такая деятельность, которая никогда раньше не осуществлялась. Самое большее можно получить оценки нескольких параметров распределения. Обычно ими являются диапазон и вид распределения. Поскольку при существующих методах вычисления применяются только среднее значение и дисперсии распределения, что будет показано далее, то характер распределения обычно рассматривается несколько произвольно. Предполагается, что распределение является бета-распределением со стандартным отклонением, равным $I/6$ диапазона. Это, конечно, слишком произвольные предположения, и они не должны восприниматься как аксиома.

Процесс решения проблемы PERT в настоящее время заключается в следующем:

а) Переформулировка проблемы как детерминистской при использовании предполагаемого значения продолжительности деятельности в качестве ее детерминистской длины^{x)}.

^{x)} Фактически используется аппроксимация среднего значения, которая может привести к ошибке, составляющей до 4% диапазона $[I]$.

б) Нахождение соответствующего критического пути P_E .

в) Использование планируемой продолжительности $\bar{t}_E$ в качестве среднего значения распределения планируемой продолжительности и использование суммы дисперсий деятельности вдоль всего критического пути в качестве дисперсии действительной планируемой продолжительности, которая затем считается имеющей нормальное распределение.

г) Определение вероятности соблюдения запланированных сроков.

Предположения, использованные для подтверждения данного подхода к проблеме, следующие:

А. Критический путь P_E производной проблемы предполагается "достаточно более длинным"^{х)}, чем любой другой путь, так что вероятность того, что реализация имеет другой критический путь, незначительна.

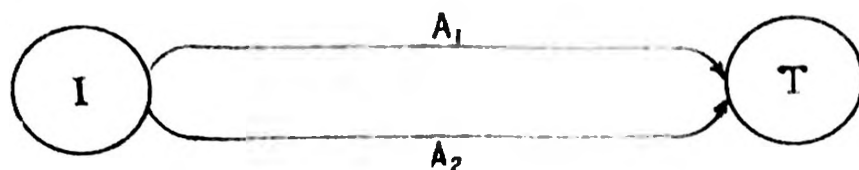
Б. Критический путь P_E имеет достаточное количество деятельности, так что может применяться центральная предельная теорема.

Следует отметить, что предположение А не требуется для определения длины критического пути или для подсчета его дисперсии, а используется лишь тогда, когда делают выводы относительно вероятности соблюдения запланированных сроков.

Для иллюстрации того, что может случиться, когда эти предположения не удовлетворяются, рассмотрим следующую простую схему.

^{х)} Очень неточный критерий измерения каждого отдельного альтернативного пути может быть получен с помощью неравенства Чебышева.

На этой схеме длительности A_1 и A_2 имеют нормальное распределение^{х)} со средними значениями μ_1 , μ_2 и дисперсиями σ_1^2 , σ_2^2 соответственно.



Показано [2], что для случайной величины максимального значения A_1 и A_2 среднее значение определяется по формуле

$$\mu_m = \mu_1 \Phi(\alpha) + \mu_2 \Phi(-\alpha) + \alpha \varphi(\alpha),$$

а дисперсия - по формуле

$$\sigma_m^2 = (\mu_1^2 + \sigma_1^2) \Phi(\alpha) + (\mu_2^2 + \sigma_2^2) \Phi(-\alpha) + (\mu_1 + \mu_2) \alpha \varphi(\alpha) - \mu_m^2$$

где
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

$$\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \alpha = (\mu_1 - \mu_2) / \alpha,$$

а μ_m и σ_m есть соответственно среднее значение и дисперсия распределения максимума. В целях упрощения предположим, что $\mu_1 = \mu_2$; тогда $\alpha = 0$ и $\mu_m = \mu_1 + (1/\sqrt{2\pi}) \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Используя последующий процесс вычисления, получают $\mu_m = \mu_1$. Следовательно, по мере увеличения σ_1^2

^{х)} Нужно понимать, что, строго говоря, не следует использовать нормальное распределение, поскольку оно не имеет ограниченных диапазонов.

или σ_2^2 можно сделать произвольно большим различие

$\Delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ между точным средним значением и средним значением, определенным с помощью аппроксимации РВРТ. Подобным же образом можно получить

$$\sigma_m^2 = 1/2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2),$$

где, согласно вышеуказанному процессу, считалось бы, что $\sigma_m^2 = \sigma_1^2$ или σ_2^2 , так что оценка могла бы быть слишком высокой или произвольно слишком низкой. Подобные упражнения позволительны и с любыми другими распределениями помимо нормального. Дело в том, что нетрудно составить целый ряд примеров, нарушающих предположение А, в которых вышеизложенный метод будет давать почти произвольные ошибки^{х)}.

Большой интерес представляют вопросы о том, что означает предположение "достаточно более длинный", и, если дана сеть, то как узнать, что условие А удовлетворено? Здесь играют роль два фактора: один из них - "сравнимость" двух путей, другой - число путей, которые могут стать критическими. Даже если каждый альтернативный путь имеет неболь-

^{х)} Это не совсем так. Например, оценка планируемой продолжительности будет всегда оптимистической при использовании данного выше процесса. Это может быть показано несколькими способами. Один из них заключается в том, что проблема может быть записана в виде линейной программы со случайным постоянным вектором, компонентами которого являются просто продолжительности деятельности. Затем могут быть применены общие результаты [6] для стохастических проблем линейного программирования. В частности, для любой проблемы линейного программирования с произвольной правой частью уравнения ответ, полученный с помощью предполагаемых значений, всегда слишком оптимистичен. Этот результат получен и в [3].

шую вероятность стать критическим, то если существует достаточное количество таких альтернативных путей, ошибка может стать значительной. При сравнении двух путей по степени критичности необходимо учитывать следующее:

- средние значения длины путей;
- дисперсии длины путей;
- корреляции путей, т.е. тех деятельности, которые являются общими для путей.

(Примеры, иллюстрирующие эти факторы, приводятся в приложении).

Вероятно, большая часть сетей, встречающихся на практике, будет удовлетворять предположению А хотя бы в той степени, которая необходима для обеспечения требуемой точности, но трудно сформулировать общие аналитические методы определения этого условия, поскольку сильна зависимость от индивидуальной применяемой схемы. Проблемы, связанные с предположением Б, являются классическими и здесь рассматриваться не будут. Нужно только отметить, что вероятности соблюдения запланированных сроков зависят от всех предположений и являются поэтому особенно ненадежными. Тем не менее, существующий процесс чрезвычайно прост и быстр, а любой другой метод решения, дающий значительно улучшенные результаты, может значительно увеличить время вычисления.

Система PERT ставит своей целью помочь руководству увидеть узкие места или возможные отказы до того, как они произойдут, чтобы можно было, пока не поздно, принять необ-

ходимые меры по корректированию. Особое внимание уделяется "руководству методом исключения". Это означает, что нужно выделить несколько деятельностей, которые являются особенно критическими и требуют тщательного наблюдения. В настоящее время внимание уделяется тем деятельности, которые находятся на "критическом пути" в сети, а распределения продолжительности деятельностей заменены их средними значениями.

Современные системы PERT в качестве выхода дают "раннее" и "позднее" время для каждой деятельности и вероятность соблюдения запланированных сроков. Поскольку это предполагаемые значения, для указания надежности оценок приводятся дисперсии этих величин. В данной работе внимание будет уделяться в основном прогнозированию планируемой продолжительности, ее дисперсии и самому характеру распределения. Все другие параметры обычно известны, поэтому выход получают, применяя по существу те же методы.

Одним из условий современных методов решения PERT, которое более всего вводит в заблуждение, является то, согласно которому считают, что существует всего лишь один критический путь. Вообще любое количество путей может быть критическим в зависимости от частной реализации произвольных продолжительностей тех деятельностей, которые действительно имеют место. Следовательно, имеет смысл говорить о "показателе критичности", который представляет собой просто вероятность того, что дуга будет расположена на критическом пу-

ти. Современные методы решения по своему характеру не могут дать никакой информации по этому вопросу. В следующем разделе будет показано, что метод Монте-Карло может дать ответы на этот и другие вопросы.

РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ PERT МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Если говорят, что систему PERT решают методом Монте-Карло, то это просто означает, что прилагают алгоритм самого длинного пути к длинной серии реализаций, каждую из которых получают, приписывая выборочное значение продолжительности каждой деятельности, определенное из соответствующего распределения. Каждая полученная таким образом реализация может рассматриваться просто как выборочное значение для моделирования. Если такая информация дана, то стандартные статистические методы используются для оценки распределения и параметров, представляющих интерес. Этот метод может быть использован двумя совершенно различными способами. Первый связан с относительно небольшой выборкой и применяется, например, для испытания классического типа гипотез, предполагающих, что действительное среднее значение равно ℓ_E , чтобы дать некоторую индикацию того, нарушено ли предположение A. Эти статистические испытания могут быть последовательными, и при проведении их могут применяться стандартные статистические методы. Этот метод имеет тот недостаток, что он дает только случайную информацию о распределении планируемой продолжительности.

Второй способ применения метода обеспечивает большие возможности. Он предполагает применение большой выборки и метода Монте-Карло для получения ответов, а не для проверки традиционных методов.

С помощью метода Монте-Карло модель может быть до некоторой степени обобщена. Распределение ресурсов, правда, осложнялось бы, но было бы все же осуществимо, особенно для определенных случаев. Например, если при осуществлении двух деятельностей пользуются одними и теми же скудными ресурсами, можно сделать так, что вторая деятельность будет начинаться после окончания первой, а при трех деятельностях последней придется подождать, пока закончатся две первые деятельности. Можно также осуществлять одну за другой три деятельности. Корреляция деятельностей легко управляется методом Монте-Карло.

Проблемы сбора данных являются одинаково серьезными как при решении их методом Монте-Карло, так и при решении обычными методами. При существующих методах решения выход не зависит от структуры распределения продолжительности деятельностей, а зависит только от их средних значений и дисперсии. Метод Монте-Карло для получения высокой точности зависит от формы распределения. С другой стороны, метод Монте-Карло характеризуется большей гибкостью в том смысле, что продолжительность деятельностей может иметь любое распределение: бета, нормальное, треугольное, однородное или дискретное (в любых комбинациях). Эта гибкость позволяет,

например, испробовать различные распределения и пронаблюдать влияние отрицания предположений или влияние сильно произвольных предположений на вид этих распределений. Пример, иллюстрирующий этот момент, дан в приложении.

Но самое большое преимущество метода Монте-Карло состоит в том, что он обеспечивает наибольшую точность вычислений. Например, оценка среднего значения методами, описанными в предыдущем разделе, всегда является низкой, тогда как метод Монте-Карло дает несмещенную оценку. Кроме того, в то время, как ранее описанный процесс является менее точным в оценках вероятности соблюдения установленных сроков, метод Монте-Карло, как будет показано в следующем разделе, дает очень хорошие ответы, исключая необходимость применения центральных предельных теорем.

И, наконец, помимо того, что этот метод дает все результаты, возможные с помощью ранее описанных методов, он дает еще информацию о "показателях критичности" или вероятности того, что деятельности находятся на критическом пути.

ТОЧНОСТЬ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

Единственный тип статистического анализа, который будет исследоваться здесь, определен на основании фиксированного количества опытов, проведенных до выборки. Тогда возникает вопрос, какова вероятность того, что наши оценки различных параметров и распределений будут "близки" к точным.

Первым параметром, который будет рассмотрен, является среднее значение планируемой продолжительности. Каждая полная реализация рассматривается как одно выборочное наблюдение, а оценка представляет собой выборочное среднее значение. Пусть X будет случайной величиной, соответствующей планируемой продолжительности. Пусть X_i (где $i = 1, \dots, N$) будет N числом независимых случайных величин, каждая из которых имеет то же распределение, что и X . Тогда $(X_1, \dots, X_N)$ есть нужная выборка. Случайная величина

$$\hat{\mu} = \sum X_i / N$$

есть оценка математического ожидания

$$\mu_x \equiv \{X\}.$$

Пусть σ_x^2 есть дисперсия для $\{X\}$, тогда дисперсия для $\{\hat{\mu}\}$ равна $\frac{\sigma_x^2}{N}$.

Поскольку будут использоваться тысячи выборок, центральная предельная теорема гласит, что $\hat{\mu}$ будет очень точной аппроксимацией нормали со средним значением μ_x и дисперсией σ_x^2 / N , которую обозначим через $Nor(\mu_x, \sigma_x^2 / N)$. Ясно, что при увеличении N неопределенность оценки математического ожидания для $\{X\}$ уменьшается. Поскольку стандартное отклонение, т.е. корень квадратный дисперсии, есть мера разброса, выраженная в тех же единицах, что и X , то, грубо говоря, точность увеличивается обратно пропорционально корню квадратному из N .

Пример. Предположим с вероятностью 0,95, что наша оценка среднего значения будет в пределах $\sigma_x / 50$ от реального

среднего. Таким образом, желательно выбрать N так, чтобы вероятность

$$P \left\{ \mu_x - (\sigma_x / 50) < \hat{\mu} < \mu_x + (\sigma_x / 50) \right\} = 0,95.$$

Имеем, что

$$P \left\{ \mu_x - \sigma_x / 50 < \hat{\mu} \leq \mu_x + \sigma_x / 50 \right\} = P \left\{ -\sqrt{N} / 50 < (\hat{\mu} - \mu_x) / (\sigma_x / \sqrt{N}) \leq \sqrt{N} / 50 \right\},$$

а $(\hat{\mu} - \mu_x) / (\sigma_x / \sqrt{N})$ распределяется по нормали $Nor(0,1)$, что означает необходимость взять такое значение t , чтобы

$$\Phi(t) - \Phi(-t) = 0,95,$$

где $\sqrt{N} / 50 = 1,96$ из таблиц нормального распределения. Это дает $N = 10000$.

Вообще говоря, дисперсия распределения неизвестна. Поэтому ее тоже необходимо определить. Для этого в качестве оценки берется

$$S^2 = (1/N) \sum (x_i - \hat{\mu})^2.$$

Предположим, что распределение X является приблизительно нормальным. Тогда NS^2 / σ^2 есть χ^2_{N-1} , так что можно получить грубые оценки возникающей ошибки [13].

Пример. Предположим, что мы хотим знать с вероятностью 0,95, что наша оценка σ^2 точна в пределах $\pm 5\%$. Это означает, что желательно выбрать такое значение N , чтобы

$$P \left\{ 0,95 \sigma^2 < S^2 \leq 1,05 \sigma^2 \right\} = 0,95,$$

но

$$P \left\{ 0,95 \sigma^2 < S^2 \leq 1,05 \sigma^2 \right\} = P \left\{ 0,95 N < NS^2 / \sigma^2 \leq 1,05 N \right\}.$$

При больших значениях N величина χ^2_{N-1} приблизительно соответствует $Nor [N-1, 2(N-1)]$. Следовательно, после некоторых преобразований получаем:

$$P\{0,95N < NS^2/\sigma^2 \leq 1,05N\} = P\{(1-0,05N)/\sqrt{2N-2} < [(NS^2/\sigma^2) - N + 1]/\sqrt{2N-2} \leq (1+0,05N)/\sqrt{2N-2}\} = 0,95,$$

где

$$[(NS^2/\sigma^2) - N + 1]/\sqrt{2N-2}$$

равно приблизительно $Nor(0,1)$. Следуя по тому же пути, находим:

$$(1 + 0,05N)/\sqrt{2N-2} = 1,96,$$

что дает $N \approx 3000$.

При наличии "показателя критичности" выборку производят просто из биномиального распределения. Оценка есть отношение числа реализаций выборки, при которых дуга критична, ко всему объему выборок. Средним значением является NP , а дисперсией $NP(1-P)$, где P - вероятность критичности. Поскольку число выборок постоянно, оценка представляет собой просто сумму независимых случайных величин и потому асимптотически нормальна.

Пример. Предположим с вероятностью 0,95, что оценка величины P является точной до 0,01. Теперь $(\hat{P}-P)/\sqrt{P(1-P)/N}$ есть асимптотически $Nor(0,1)$, где P - наша оценка. Желательно, чтобы вероятность $\{|\hat{P}-P| > 0,01\} = 0,05$ или вероятность $\{-0,01/\sqrt{P(1-P)/N} < (\hat{P}-P)/\sqrt{P(1-P)/N} \leq +0,01/\sqrt{P(1-P)/N}\} = 0,95$.

Поскольку $P(I-P) \leq 1/4$, то если вероятность

$$\left\{ -0,02\sqrt{N} \leq (\hat{p} - p) / \sqrt{p(1-p)/N} \leq 0,02\sqrt{N} \right\} = 0,95,$$

результат будет даже лучше. Это означает, что

$$0,02\sqrt{N} = 1,96 \quad \text{или} \quad N \approx 10000.$$

Наконец, нужно оценить соблюдение определенных установленных сроков. Для любого данного установленного неизменного срока проблема снова заключается в выборке из биномиального распределения, и проводится предыдущий анализ. С другой стороны, можно не ограничиваться каким-то неизменным сроком и узнать точность любого взятого срока, т.е. можно узнать, насколько выборочное распределение планируемой продолжительности "соответствует" реальному.

Если предположить, что кумулятивная функция распределения планируемой продолжительности непрерывна, то можно сделать вероятностные утверждения относительно наибольших абсолютных различий между выборочной кумулятивной функцией распределения и действительной функцией независимо от самого распределения [13]. В 1933 г. Колмогоров дал асимптотические результаты для данного случая [8].

Пример. Пусть $D_n = \sup |F_n - F|$, где F — кумулятивная функция распределения родственной совокупности, а F_n — выборочная кумулятивная функция. Находим в таблицах величины $Z, L(Z)$, где

$$L(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} PR \left\{ \sqrt{n} D_n \leq Z \right\}.$$

Предположим с вероятностью 0,95, что максимальное отклонение составляет менее 0,01. При $L(Z) = 0,9505$ определяем, что $Z = 1,36$. Решая относительно N в $\sqrt{N(0,01)} = 1,36$, находим, что $N = 18,500$. Статистический анализ других выходов, представляющих интерес, проводится с помощью методов, описанных в этом разделе.

СОКРАЩЕНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Как и в большинстве случаев применения метода Монте-Карло, существует целый ряд способов сокращения процесса вычислений при решении проблем PERT. При решении проблем PERT методом Монте-Карло большая часть времени уходит на образование случайных чисел. Задача состоит в том, чтобы избежать выборки тех распределений продолжительности деятельностей, которые редко или вообще не расположены на критическом пути. Эти деятельности не влияют значительно на решение. Нужно, конечно, определить эти деятельности. Здесь будут рассмотрены два метода. Первый из них - аналитический [5], второй - статистический метод.

Поскольку распределение продолжительности деятельностей имеет ограниченные диапазоны, может оказаться, что пути никогда не будут критическими. Это можно установить следующим образом. Рассмотрим реализацию, полученную при установке продолжительностей всех деятельностей на низшую точ-

ку их диапазонов, и определим соответствующий критический путь P и продолжительность пути ℓ . Теперь установим продолжительности тех деятельности, которые не находятся на критическом пути, на их наивысшие значения. Тогда критическими могут быть только те деятельности, которые находятся на путях длиннее ℓ . Оставшиеся виды деятельности могут быть исключены. В работах [9] и [II] даются алгоритмы для нахождения этих путей. Этот процесс не устраняет целиком все дуги, которые никогда не смогут быть критическими. Более того, если число путей длиннее ℓ является достаточно большим, то алгоритм может стать абсолютно неприемлемым.

Статистический метод гораздо проще и может быть применен к продолжительностям деятельности с неограниченными диапазонами. Описанный здесь метод состоит из относительно небольшой выборки с использованием всех деятельности. Затем процесс выборки прекращается и исключаются все деятельности, которые никогда не будут критическими. Для данной сети размер начальной выборки определяет ошибку, состоящую в том, что исключили ту дугу, которую "следовало" бы оставить. Например, если бы начальная выборка производилась 1000 раз, то вероятность того, что данная деятельность (при вероятности критичности 0,01) не будет критической, равна $(0,99)^{1000} = 7,3 \times 10^{-5}$. Другая возможность избежать ошибочного исключения деятельности заключается в том, чтобы вовсе не исключать деятельности, а использовать каждую случайную

выборку для тех деятельностей, которые имеют низкую критичность, для K реализаций перед новой выборкой. Другими словами, новые продолжительности деятельностей для этих дуг выбираются только при каждой K -ой реализации. Те же оценки, что и прежде, являются соответственно несмещенными оценками распределения планируемой продолжительности от ее средних оценок и вероятностей критичности дуг. Оценка дисперсии планируемой продолжительности является уже состоятельной. Дисперсия не уменьшается, а, наоборот, слегка увеличивается. Сокращение достигается путем выборки "не имеющих особого значения" деятельностей только на $(1/K)$ -ый раз от выборок более важных деятельностей. Согласно этому методу нет необходимости отделять только те деятельности, которые никогда не будут критическими при первоначальной выборке, но и все те деятельности, которые были на критическом пути меньше определенного количества реализаций.

Например, рассмотрим ситуацию, когда не требуется точное распределение планируемой продолжительности, а требуется только его среднее значение и дисперсия. В таком случае деятельность, которая всегда является критической, может быть заменена детерминистской деятельностью, продолжительность которой равна среднему значению первоначального распределения. Выполняется тот же процесс, что и прежде, за исключением того, что первоначальные дисперсии всех измененных деятельностей должны быть прибавлены к оцененному значению дисперсии планируемой продолжительности.

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ БУДУЩЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДА

Экспериментальный вычислительный код был составлен для вычислительной машины IBM 7090, на которой была испытана возможность оценки сетей PERT методом Монте-Карло. Был проведен цикл из 10000 выборок и выполнено до 45 деятельности. Код может управлять 1000 деятельностью и может образовывать функции однородного, треугольного и бета-распределения продолжительности. Результатом является функция плотности планируемой продолжительности, ее среднее значение, дисперсия и показатель критичности для каждой деятельности.

Опыт показывает, что большая часть времени уходит на образование случайных чисел, так что время выполнения является фактически линейной функцией определенного числа случайных величин, или при постоянном размере выборки линейной функцией определенного числа деятельности в сети. Это особенно справедливо для сетей больших размеров. Для сети из 200 деятельности и 10000 выборок время выполнения составляло бы 20 мин для треугольных распределений и около 5 мин для однородных распределений. Это должно сравниваться с аналитическими методами, трудность применения которых экспоненциально возрастает с увеличением числа дуг.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Во всех показанных здесь видах моделирования использовалось 10000 реализаций. На рис. I показано распределение

для дуг большинства примеров. На рис.2 и 3 показано влияние на планируемую продолжительность двух путей приблизительно одной и той же длины. Величины μ_p и σ_p^2 обозначают среднее значение планируемой продолжительности и дисперсию. На рис.3 кумулятивное распределение планируемой продолжительности наносится на график при $\mu_i = 5; 9,5$ и 10. Темный участок на графике обозначает 95%-ную доверительную полосу. (См. раздел "Точность метода Монте-Карло"). Соответствующим образом на рис.4 и 5 показан эффект многократности путей сравнимой длины. Доверительными участками являются 95%-ные доверительные интервалы. На рис.6 и 7 показан эффект корреляции между чередующимися путями. Поскольку каждая дуга в этих первых примерах выражает пути, составленные из многих деятельности, было бы более реальным предположить нормальные распределения для длины дуг. В этом случае таблица, приведенная на рис.2, может быть переделана с помощью результатов, изложенных в [2]. Это сделано в табл.1.

Таблица 1

μ_i	μ_p	σ_p^2
5	10	1
8	10,05	0,896
9,5	10,35	0,703
10	10,56	0,681

Подобным же образом может быть переделана таблица, показанная на рис.4, с помощью порядковых статистик $[IO]$. Результаты показаны в табл.2.

Таблица 2

n	μ_p	σ_p^2
1	10	1
2	10,56	0,681
3	10,84	0,559
5	11,16	0,447
10	11,54	0,344
" ∞ "	∞	0

На рис.8 показано, как сумма независимых однородно распределенных случайных величин приближается к нормальному. Это достигается с помощью однородного распределения, так что вычисления могут производиться аналитически. В каждой сумме распределение имеет дисперсию 1.

На рис.9 показано, где дуга 1-2 (которая не расположена на "критическом пути" 1-3-4) является в смысле PERT, т.е. в стохастическом смысле, более критической, чем любая другая дуга. На рис.10 дан пример, приведенный в $[I]$. Три числа, приписанные каждой деятельности, представляют собой соответственно оптимистические, наиболее вероятные и пессимистические оценки каждой деятельности.

Планируемая продолжительность по методу PERT составляет $66,0^x$ с дисперсией $60,27$. Метод Монте-Карло (при 10000 реализаций) дает среднее значение $67,0 \pm 0,13$ и дисперсию $42,39 \pm 2$.

Продолжительности деятельности имели бета-распределение, конечные точки и виды которого выражены тремя параметрами, указанными на рис.10. Считается, что стандартное отклонение составляло $1/6$ диапазона.

На рис.11 нормальное распределение со средним значением $66,0$ и дисперсией $60,27$ сравнивается с распределением, полученным по методу Монте-Карло. На рис.12 приводится сеть с показателем критичности для каждой деятельности. Жирная линия обозначает "критический путь", определенный с помощью предполагаемых величин продолжительности каждой деятельности.

Согласно вышеизложенному анализу при $N = 10000$ можно предположить с вероятностью $0,95$, что оцененное среднее находится в пределах $\sigma_x/50$ реального среднего. Используя квадратный корень оцененной дисперсии в качестве аппроксимации функции σ_x , получаем:

$$\sigma_x / 50 = \sqrt{42} / 50 = 0,13.$$

Поскольку оценка по методу Монте-Карло на $1,0$ отличается от оценки по методу PERT, различие является статисти-

^{x)} Фактически, когда регулируется аппроксимация, применяемая для вычисления среднего бета-распределения, оценка PERT равна $65,5$.

чески значимым на 95%-ном уровне. Определив наименьшую и наибольшую возможную планируемую продолжительность путем использования для продолжительностей каждой деятельности оптимистического и пессимистического времени соответственно, находят, что расхождение на одну единицу будет порядка 1,5% диапазона. С другой стороны, дисперсия распределения, оцененная по методу PERT, в 1,42 раза больше оценки по методу Монте-Карло, но, как было показано ранее, вероятность того, что оценка по методу Монте-Карло находится в пределах 5% от правильной величины, составляет более 0,95. Наконец, на рис.13 вероятность того, что проект будет завершен за время X, наносится на график как оцененная по методу PERT и по методу Монте-Карло. При $N = 10000$ в $\mathcal{N}(D_n) = 1,36$ выборочное кумулятивное распределение находится в пределах 0,0136 реального распределения в каждой точке с вероятностью 0,95.

Также следует отметить, что деятельности 6-8 и 8-9 никогда не были критическими. Фактически они не могут быть критическими, а данный ранее детерминистский алгоритм не раскрывает этого. Следовательно, в этом случае предпочтение отдается статистическому методу.

Наконец, на рис.14 и 17 показано влияние распределений различных деятельности на общее планируемое распределение. Используемые распределения являются однородными и треугольными, как в сети, приведенной на рис.10. Пересчитывая планируемое среднее значение и дисперсию, предсказанную мето-

дом PERT, с помощью точных средних значений и дисперсии деятельности получаем для случая треугольного распределения $\mu_p = 69$ и $\sigma_p^2 = 92,77$. Реальными величинами, определенными путем моделирования, являются $\mu_p = 71,70 \pm 0,15$ и $\sigma_p^2 = 58,34 \pm 3$. Когда же используется однородное распределение, метод PERT дает $\mu_p = 72,0$ и $\sigma_p^2 = 172$. Путем моделирования получают $\mu_p = 77,61 \pm 0,2$ и $\sigma_p^2 = 92,31 \pm 5$. Однако следует отметить, что для целей планирования результаты, полученные во всех трех случаях, являются в основном одинаковыми; в каждой сети одни и те же деятельности имеют высокие показатели критичности.

Среднее значение = 10;

дисперсия = 1;

вид = 9,56;

диапазон 14,06 8,06 = 6;

$\sigma = 1/6$ диапазона.

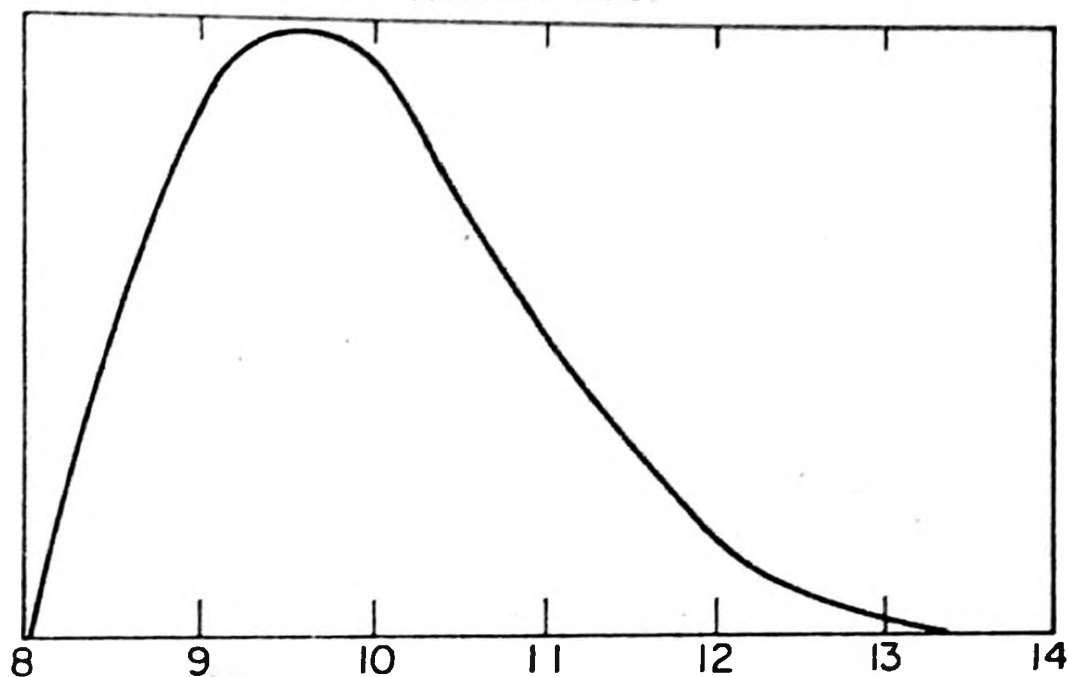
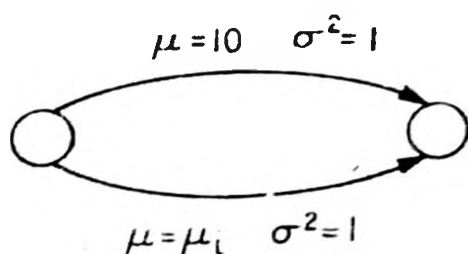


Рис.1. - Типичное распределение дуги.



μ_i	$\mu_p \pm .02$	$\sigma_p^2 \pm .05$
5	10.00	1.0
8	10.04	0.96
9.5	10.35	0.84
10	10.56	0.84

Рис.2. - Пути почти равной длины.

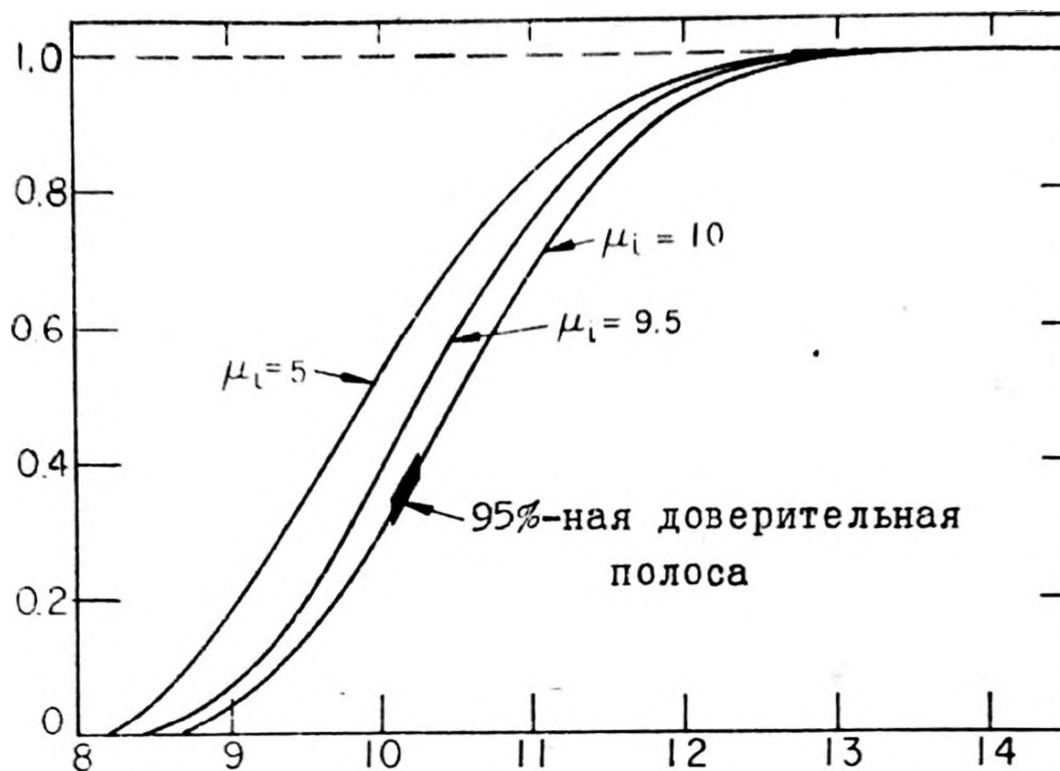


Рис.3.

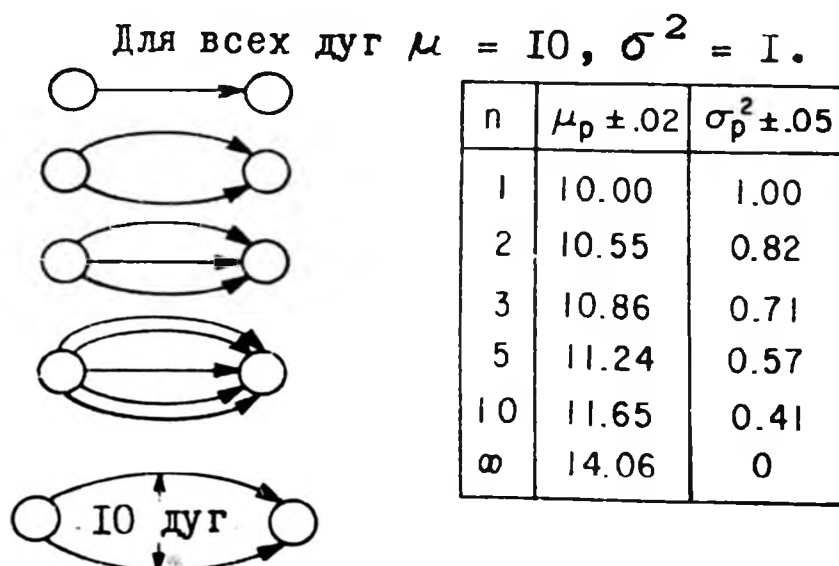


Рис.4. Эффект определенного числа параллельных путей.

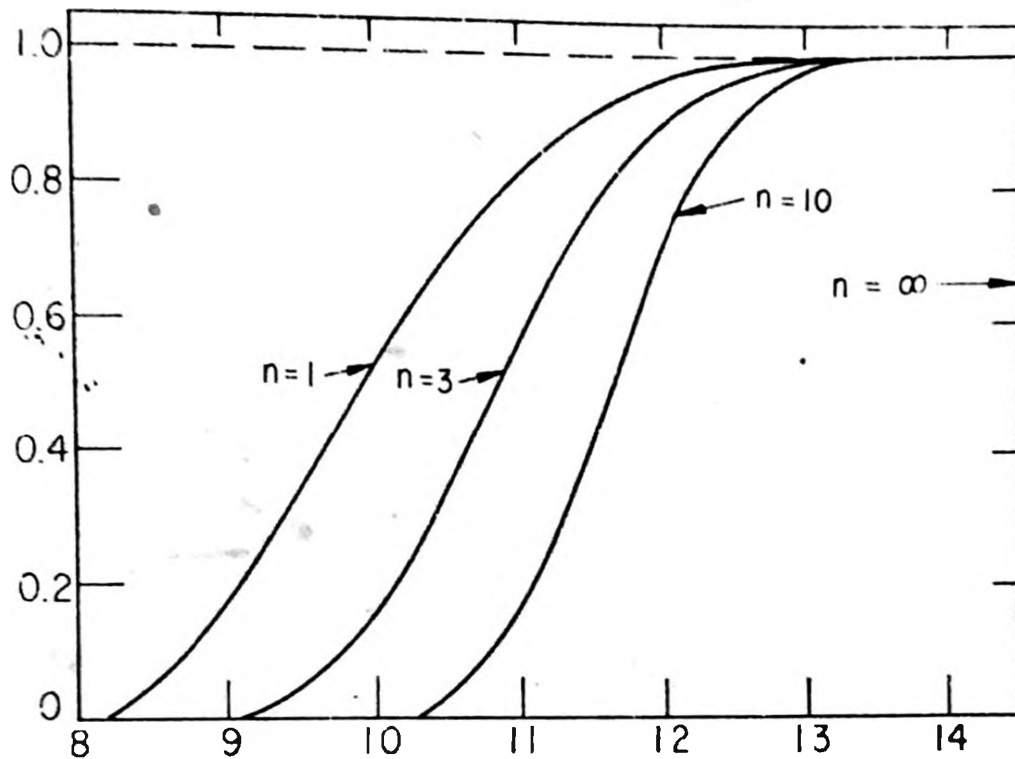
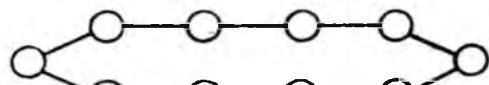
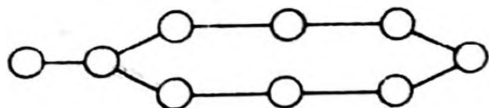


Рис.5.

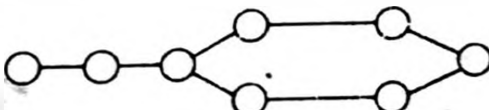
Все дуги имеют $\mu = 10$, $\sigma^2 = 1$.



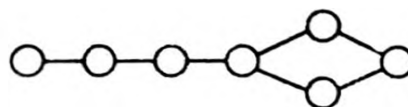
$$\mu_p = 51.24 \pm 0.04 \quad \sigma_p^2 = 3.82 \pm 2$$



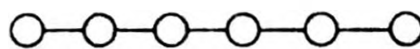
$$\mu_p = 51.09 \pm 0.04 \quad \sigma_p^2 = 4.13 \pm 2$$



$$\mu_p = 50.96 \pm 0.04 \quad \sigma_p^2 = 4.30 \pm 2$$

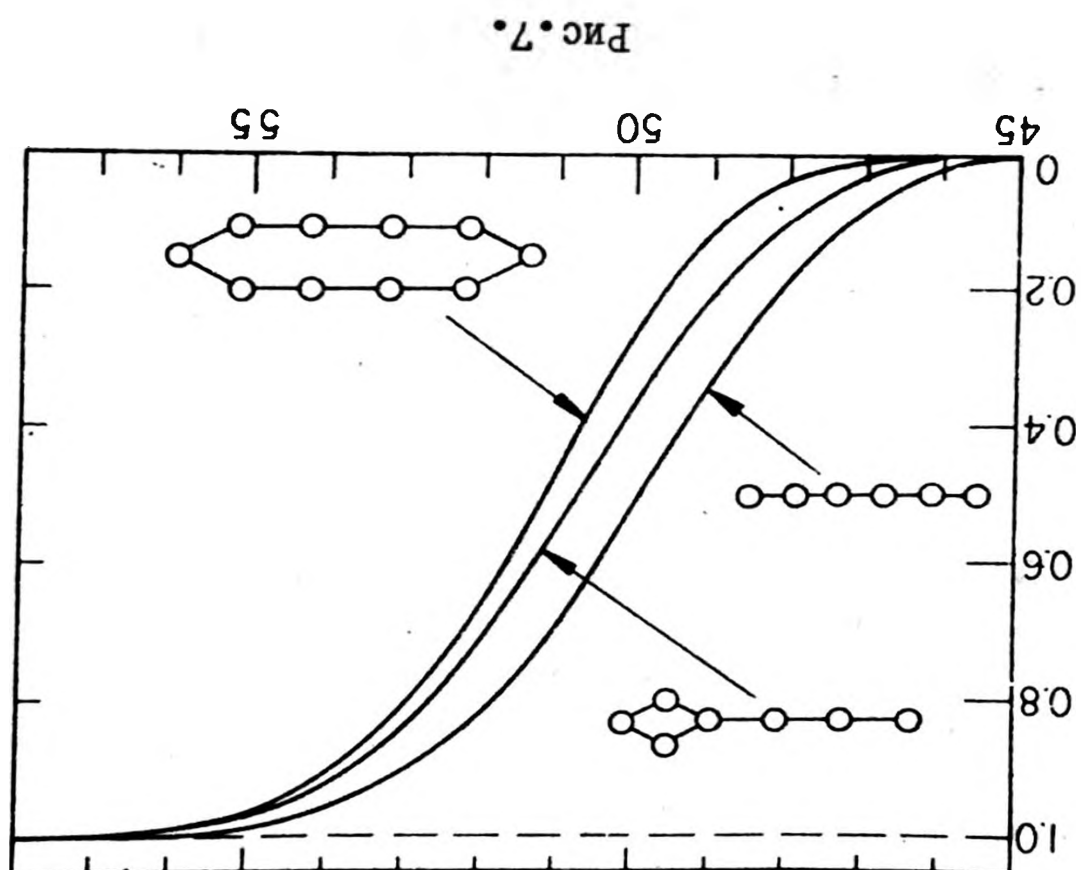


$$\mu_p = 50.80 \pm 0.05 \quad \sigma_p^2 = 4.57 \pm 3$$



$$\mu_p = 49.98 \pm 0.05 \quad \sigma_p^2 = 4.86 \pm 3$$

Рис.6. Корреляция между параллельными путями.



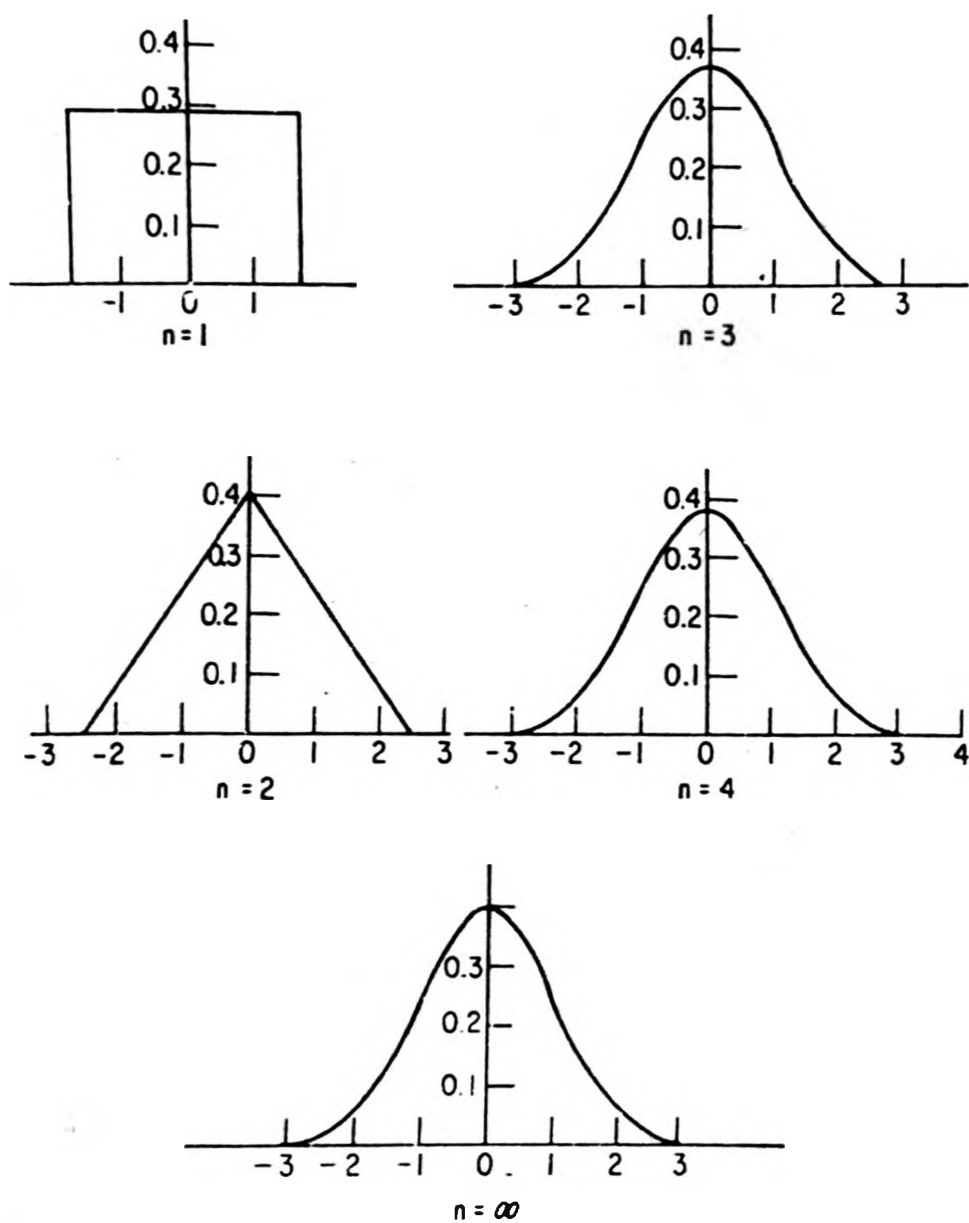
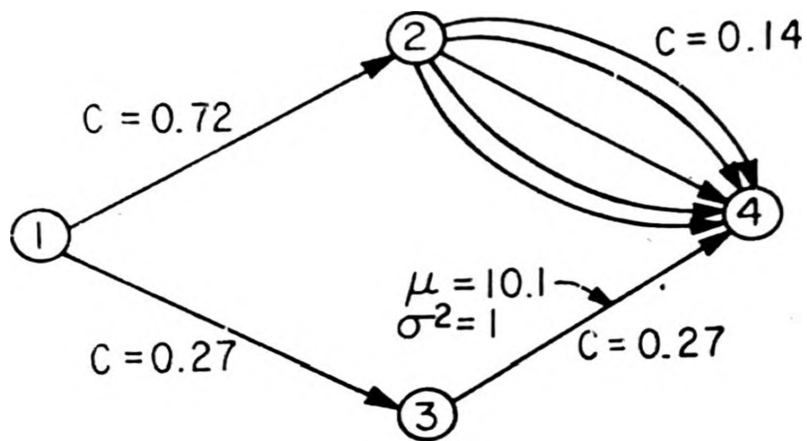


Рис.8. Предположение В - сумма независимых случайных величин.



$\left. \begin{matrix} \mu = 10 \\ \sigma^2 = 1 \end{matrix} \right\}$ для всех дуг за исключением указанной.

Рис.9. Показатель критичности C .

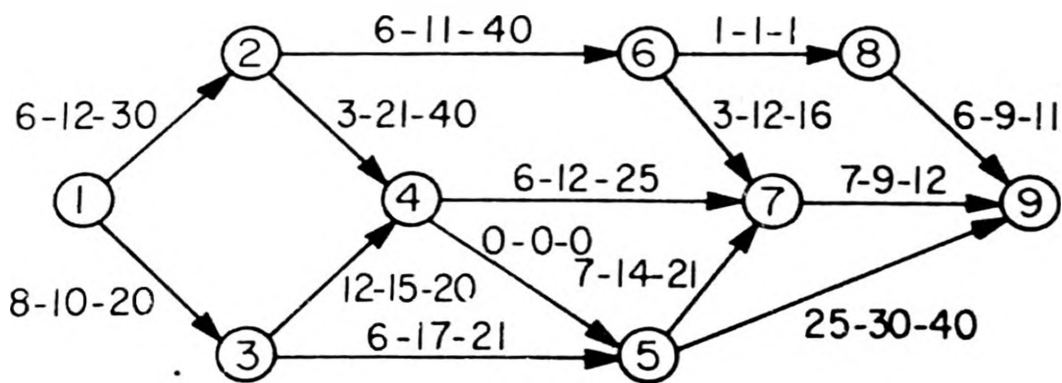
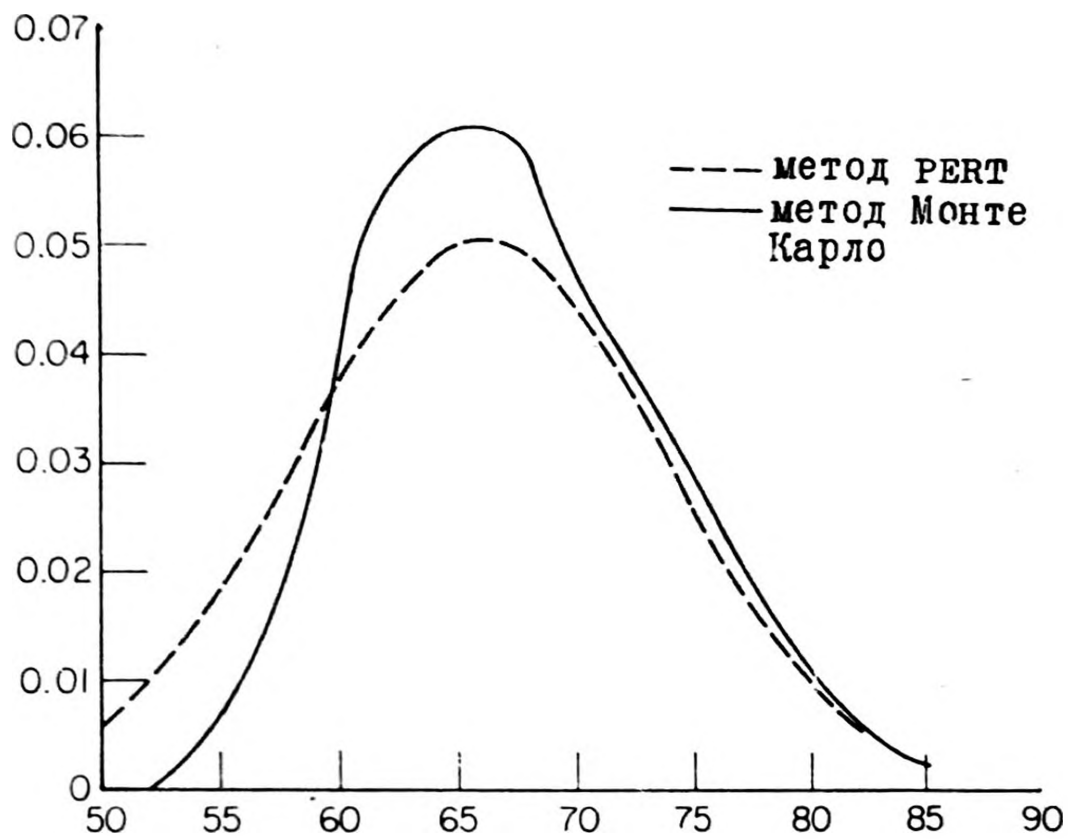


Рис.10.



Вероятностные кривые плотности

Рис. II.

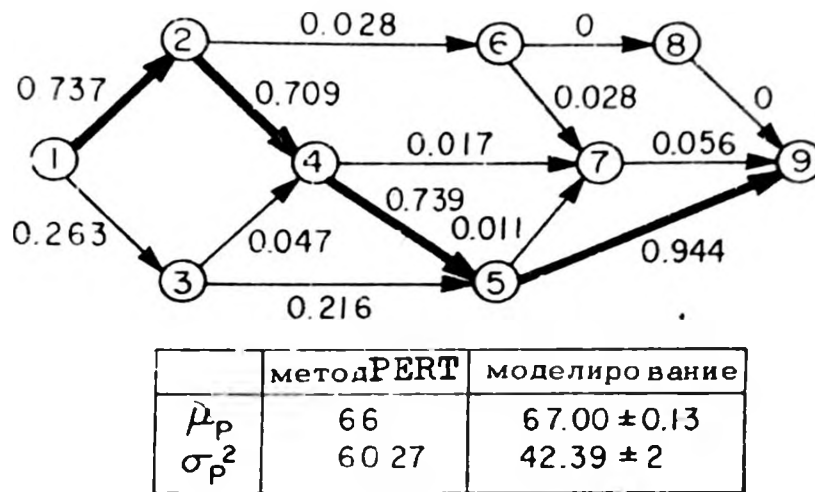


Рис.12. Пример с бета-распределением.

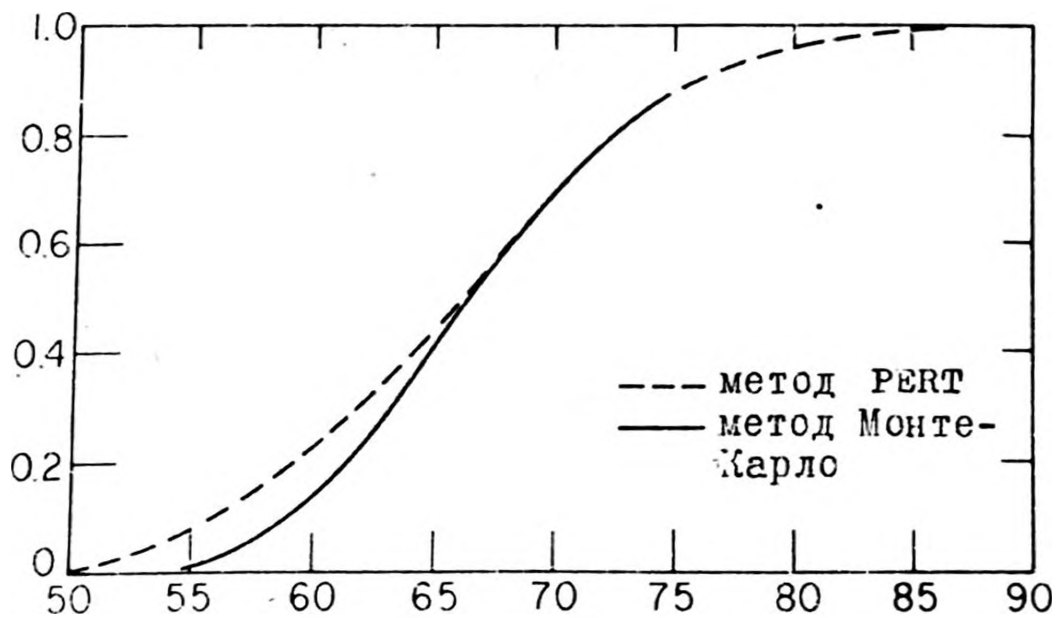
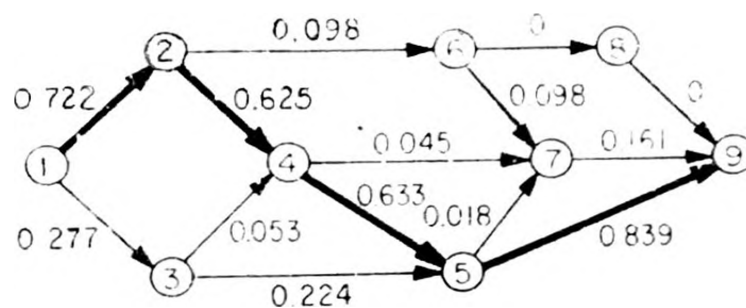


Рис.13.



	метод PERT	моделирование
μ_p	69	71.69 ± 0.13
σ_p^2	92.77	58.94 ± 3

Рис.14. Пример с треугольным распределением.

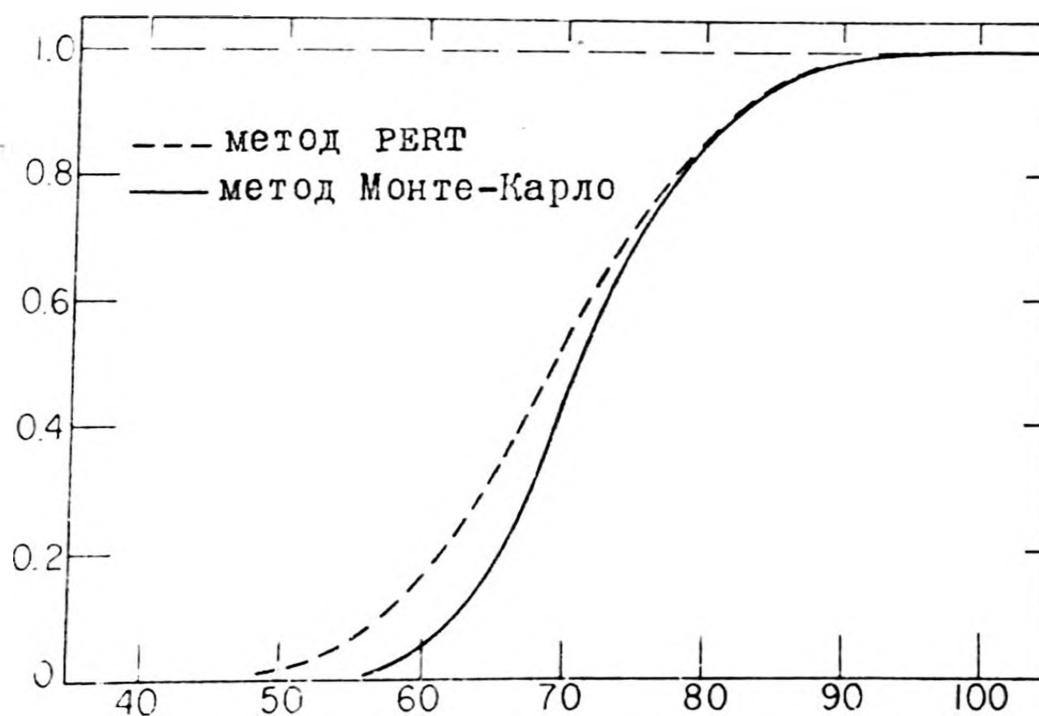
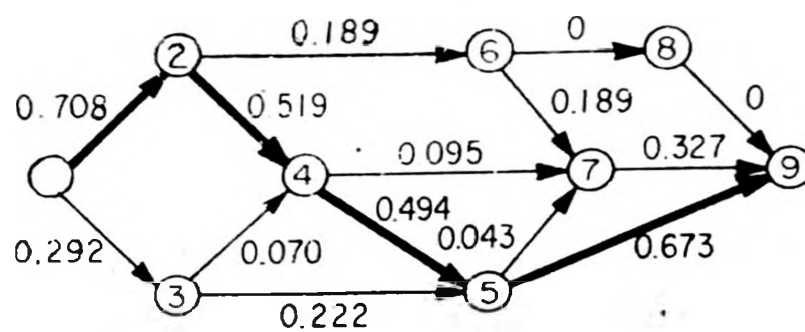


Рис.15.



	метод PERT	моделирование
μ_p	72	77.61 ± 0.2
σ_p^2	172	92.34 ± 5

Рис. I6. Пример с однородным распределением.

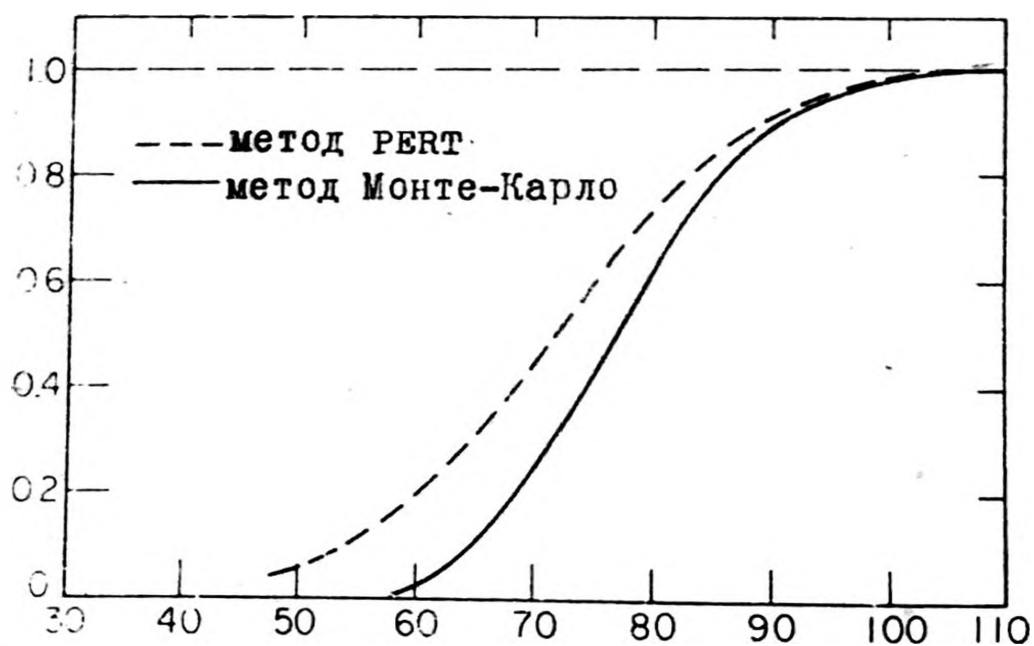
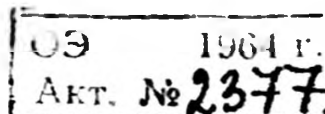


Рис. I7.

Б и б л и о г р а ф и я

1. Air Force Systems Command, "PERT-AFSC Policies and Procedures Handbook," ASD Exhibit ASOO 61-1.
2. C. E. CLARK, "The Greatest of a Finite Set of Random Variables," *Opus. Res.* **9**, 145-162 (1961).
3. D. R. FULKERSON, "Expected Critical Path Lengths in PERT Networks" *Opus. Res.* **10**, 808-817 (1962).
4. J. E. KELLEY AND M. R. WALKER, "Critical Path Planning and Scheduling," *Proc. E.J.C.C.*, (1959).
5. K. R. MAC CRIMMON AND C. A. RYAVEC, "An Analytical Study of the PERT Assumptions," Rand Research Memorandum, RM-3408-PR (December 1962).
6. A. MADANSKY, "Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems," *Management Sci.* **6**, 197 (1960).
7. D. G. MALCOM, J. H. ROSEBOOM, C. E. CLARK, AND W. FAZAR, "Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation," *Opus. Res.* **7**, 646-669 (1957).
8. D. B. OWEN, *Handbook of Statistical Tables*, Addison-Wesley, New York, 1962.
9. M. POLLOCK, "Solutions of the k th Best Route Through a Network - A Review," *J. Math. Analysis and Appl.* **3**, 547 (1961).
10. A. SARHAM AND B. BRUNBERG, *Contributions to Order Statistics*, Wiley, New York, 1962.
11. J. W. SUTBALL, "Network Algorithms for Combinatorial and Discrete Variable Optimization Problems," to appear in *Proc., Symp. on Math. Programming*, Chicago, 1962.
12. R. M. VAN SLYKE, "Uses of Monte Carlo in PERT," Rand Research Memorandum, RM-3367-PR (February 1963).
13. S. S. WILKS, *Mathematical Statistics*, Wiley, New York, 1962.

6p/58336



System Lab

system-laboratory.ru